

Math. P. 614 m

LEHRBUCH
DER
GEOMETRIE

NEBST IHRER
AUSGEDEHNTEN ANWENDUNG
AUF DIE
LOESUNG GEOMETRISCHER PROBLEME.

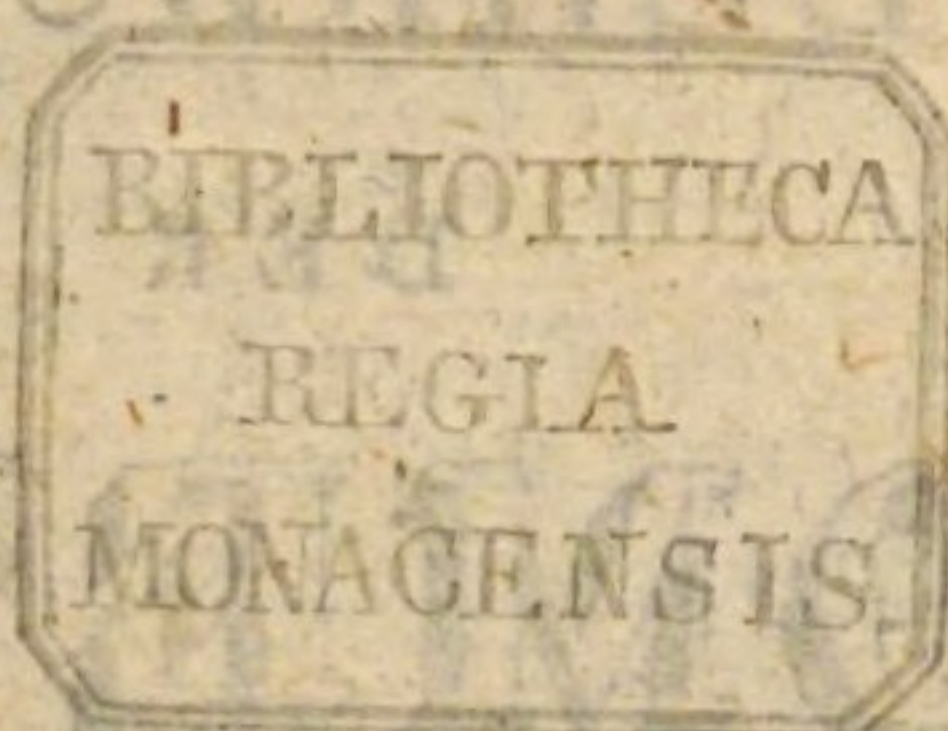
VORZÜGLICH
ZUM GEBRAUCHE FÜR SCHULEN.

R
VON
RAIMUND UNRUH,

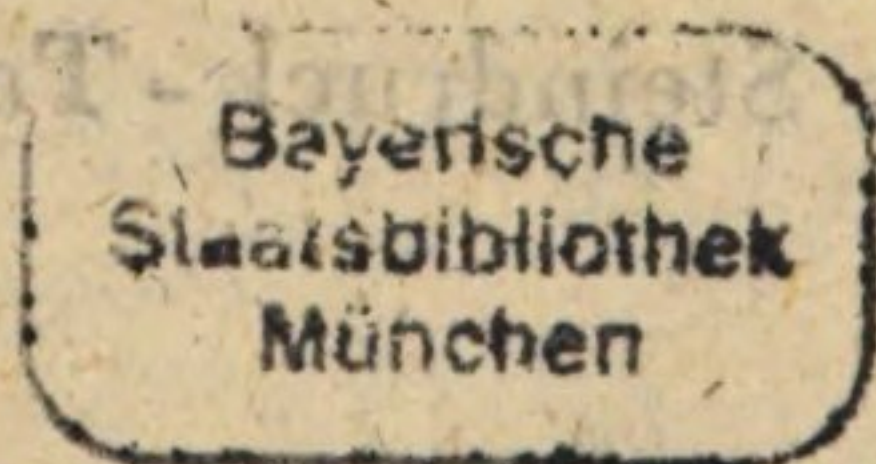
Doctor der Philosophie und königlich-baierischer wirklicher
Professor der Mathematik im königlichen Cadetten-Corps
zu München.

Mit 4 Steindruck-Tafeln.

MÜNCHEN 1824.
BEY JOSEPH A. FINSTERLIN.



Dreyfach ist des Raumes Maß.
Rastlos fort ohn' Unterlaß
Strebt die *Länge* fort in's Weite;
Endlos giesset sich die *Breite*;
Grundlos senkt die *Tiefe* sich.
Dir ein Bild sind sie gegeben,
Rastlos vorwärts mußt du streben,
Nie ermüdet stille steh'n,
Willst du die Vollendung seh'n,
Mußt in's Breite dich entfalten,
Soll sich dir die Welt gestalten,
In die Tiefe mußt du steigen,
Soll sich dir das Wesen zeigen.
Nur Beharrung führt zum Ziel;
Nur die Fülle führt zur Klarheit
Und im Abgrund wohnt die Wahrheit.



SEINER HOCHWÖHLGEBOREN
DEM
KÖNIGLICH BAIERISCHEN HERRN
GENERAL - MAJOR
UND
COMMANDANTEN DES KÖNIGL. BAIER.
CADETEN - CORPS
GEORG VON TAUSCH,

Ritter des Civil - Verdienst - Ordens der baier. Krone etc.

als Zeichen innigster Verehrung und ausgezeichneteter
Hochachtung

g e w i d m e t

von dem Verfasser.

GEORG VON TAUSCH
CAPITAN - CORPS
COMMANDANTEN DES KÖNIGL. BAYR.
UND
GENERAL - MAJOR
KÖNIGLICH BAYEISCHEN HEERES
DEM
SEINER HOCHWÜRDIGKEITEN

Ritter des Civil - Verdienst - Ordens der bayer. Krone etc.

Hochachtung
als Zeichen unserer Verehrung und ausgezeichneten

gewidmet

von dem Verfasser.

V o r r e d e.

Durch den entscheidenden Einfluß ihrer Lehren auf die Befriedigung der dringendsten Bedürfnisse aller Zweige des Lebens genoß die Mathematik bisher mit Recht immer die Achtung aller cultivirten Nationen, denn keine Wissenschaft klärt den Verstand mehr auf, schärft mehr die Urtheilskraft, gewöhnet mehr an eine genauere Ordnung im Denken, als die Mathematik. Besonders zeichnet sich jener Theil derselben, welchen wir unter dem Nahmen Geometrie kennen, als eine Wissenschaft aus, die nicht blos wegen ihrer ausgebreiteten Verbindung mit anderen Erkenntnissen von großer Wichtigkeit ist, sondern auch durch ihr Studium an sich ungemein zur Bildung des Verstandes beiträgt. Sie ist es, welche antreibt, seine Vorstellungen sich selbst deutlich zu machen, die Urtheilskraft im Vergleichen übet und der Vernunft Gelegenheit gibt, Gründe für die Wahrheiten zu erkennen und aufzusuchen, um sie zu begreifen, wodurch das systematische Denken befördert wird und auch die Imagination Gelegenheit erhält, allgemeine Begriffe anschaulich darzustellen.

Die Mathematik läßt sich aus zwey sehr verschiedenen Gesichtspuncten betrachten; nämlich sie erscheint ein Mahl als *Wissenschaft*, und das andere Mahl als *Kunst*. In der ersten erblickt man ihre Methode, eine Reihe von Wahrheiten zu verbinden und in ein System zu vereinigen, so, daß jede einzelne aus der vorhergehenden auf eine einfache und evidente Art erkannt werden kann. In der zweyten müssen die Methoden und die Kunstgriffe dargelegt seyn, um etwas Gesuchtes finden zu können.

Diesemnach habe ich bey Bearbeitung dieses Lehrbuches die eigentlichen Anfangsgründe, als *Wissenschaft* im strengen Zusammenhange und in möglichster Kürze geordnet, also dem Anfänger ein einfaches, vollständiges, auf fester Grundlage ruhendes Gebäude successive aufgeführt; sodann nachher in einem besonderen Anhange Uebungs-Aufgaben und schwierigere Untersuchungen als eine *Anwendung* der Anfangsgründe folgen lassen. Dieses gewähret, meinem Urtheile nach, den zweyfachen Nutzen, daß der Ueberblick über den Zusammenhang der ersten Gründe erleichtert, und zugleich ein einfaches Mittel erhalten werde, ohne lästige Wiederholung der Anfangsgründe ihre Anwendungen zu zeigen.

Die Auflösungen der geometrischen Aufgaben enthalten nicht bloß die analytische und synthetische Methode als Anwendung der Algebra, der Seele der Mathematik, sondern auch

und besonders die Construction der algebraischen Formeln, von welcher so selten etwas in den Lehrbüchern der Geometrie erwähnt ist, da sie doch den grossen Vortheil hat, daß man mittelst derselben stets sieht, wie ein Verhältniß aus dem anderen entsteht, und sich so die abgeleiteten Formeln weit fester in das Gedächtniß einprägt.

Dem Studirenden — welchem ich durch vorliegendes Buch Gelegenheit verschaffen wollte, in möglichster Kürze etwas Gediegenes zu erlernen, welcher auch in diesen wenigen Bogen alles das vollständig findet, was Andere in voluminösen Büchern, unnütz weitläufig und folternd für den Anfänger oft nur halb lieferten, — rathe ich, als ein besonderes Erleichterungsmittel, beym Studium dieser Wissenschaft sich jedes Mahl die Figuren, dem Lehrsätze oder der Aufgabe gemäß, zu zeichnen, und im Fortgange des Beweises oder der Aufgabe selbe successive zu construiren; indem er nicht selten durch den Anblick der schon vollendeten Figur verwirrt und im Fortschreiten und Durchschauen der einzelnen Beziehungen getäuscht werden könnte.

Da ferner das zweckmäßige Studium dieser Wissenschaft eine treffliche Uebung der in der Logik vorkommenden Denkgesetze, ja eigentlich ausübende Logik ist, und als solche den philosophischen Forschungsgeist übt, und gewöhnt, auch als solche zum Besitze einer Menge von Wahrheiten und zu jener Geistesstim-

VIII

mung führt, die man bey dem Eintritte in andere Wissenschaften mitbringen muß; so könnte dieses Lehrbuch auch füglich — da doch jeder, der sich den Wissenschaften widmen will, zu seiner philosophischen Ausbildung Mathematik als Wissenschaft studiren soll — in jeder wissenschaftlichen Lehranstalt mit besonderem Nutzen eingeführt werden, indem der Lehrer, bey dem Vortrage des Systemes dieser Wissenschaft, aus dem Anhange der geometrischen Aufgaben die für seinen Zweck passendste Auswahl machen könnte.

Dieses ist der Gesichtspunct, aus welchem, wie ich wünsche, Sachkundige dieses Lehrbuch betrachten möchten, zu dessen Herausgabe mich der Reichthum der Wissenschaft einerseits, und anderseits der herzlichste Wunsch bewog, den Wissbegierigen im kürzesten Zeitaufwande zur vollsten Erkenntniß dieser Wissenschaft zu leiten.

Das Lehrbuch der Trigonometrie, nach demselben Gesichtspuncte bearbeitet, wird diesem in Bälde folgen.

München im October 1823.

Der Verfasser.

G e o m e t r i e.

E i n l e i t u n g.

§. 1.

Erklärungen. Eine Gröfse heifst *stetig* (quantum continuum), wenn ihre Theile so zusammenhängen, dafs das Ende des einen unmittelbar der Anfang des andern ist. Man unterscheidet *zeitlich-stetige* und *räumlich-stetige Grössen*, je nachdem die Stetigkeit in Bezug auf die Zeit oder auf den Raum betrachtet wird.

Die Wissenschaft der *räumlich-stetigen* oder der *ausgedehnten Grössen* heifst *Geometrie*.

Der Raum ist unendlich, und hat eine dreifache Ausdehnung (*dimensio*), nemlich *Länge*, *Breite* und *Höhe*.

Die Ausdehnung nach Länge heifst eine geometrische *Linie*, die nach Länge und Breite eine geometrische *Fläche*, und die Ausdehnung nach Länge, Breite und Höhe ein geometrischer *Körper*.

Das Aeusserste eines Dinges heifst seine *Grenze*. Die Grenze des Körpers ist eine Fläche, die der Fläche eine Linie, und die der Linie ein *Punct*, oder ein Ort im Raume ohne alle Ausdehnung.

§. 2.

Erklärung. Eine Linie entsteht durch die Bewegung eines Punctes, wenn man die Spuren der Bewegung im Raume, als bezeichnet, vorstellt. Eben so bildet die Spur der Bewegung einer Linie die Fläche, und die der Bewegung einer Fläche einen Körper. Die Theile einer Linie sind Linien, die der Fläche Flächen, und die der Körper ebenfalls Körper.

§. 3.

Erklärung. Linien, Flächen und Körper sind, als räumlich-stetige Grössen, der Gegenstand der Geometrie. Diese bestimmt deren Lage, Grösse und deren gegenseitige Verhältnisse.

I. Theil.

Von Linien und Flächen.

I. Abschnitt.

Von Linien und Winkeln überhaupt.

§. 4.

Erklärung. Eine *gerade Linie* (*linea recta*) ist diejenige, welche zwischen den auf ihr befindlichen Punkten gleichförmig liegt. Jede Linie, die nicht gerade, und nicht aus geraden Linien zusammengesetzt ist, heisst *krumm* (*curva*). So ist z. B. (Fig. 1.) die Linie *A B* gerade, und die Linie *A C D B* krumm. Ueberdies giebt es auch *gerade-* und *krummgebrochene*. Erstere bestehen aus mehreren geraden Linien, die in verschiedenen Richtungen liegen, und letztere aus mehreren krummen, wie *A E F B* und *A C D B*.

§. 5.

Grundsatz. Von einem Punkte *A* (Fig. 1.) zu einem andern *B* giebt es nur eine gerade Linie, krumme und gebrochene aber unendlich viele. Die gerade Linie ist darunter die kürzeste.

I. Zusatz. Durch zwey Punkte ist die Lage, und durch die Endpunkte auch noch die Grösse einer geraden Linie bestimmt.

II. Zusatz. Zwey gerade Linien schneiden sich nur in einem Punkte.

III. Zusatz. Gerade Linien, die gleich groß sind, sind *congruent*.*)

§. 6.

Erklärung. Eine *Fläche* heisst *eben* (*superficies plana*).

*) Bey stetigen Grössen findet man die Congruenz, d. i. Uebereinstimmung in Grösse und Form, (in Quantität und Qualität), wenn sie, auf einander gelegt, mit allen ihren Theilen zusammenfallen. Man sagt dann, sie decken sich (*congruunt*).

na), oder eine *Ebene* (planum), wenn jede gerade Linie, die man von irgend einem Puncte derselben, zu irgend einem andern in ihr, zieht, ganz in der Fläche liegt. Ist kein Theil der Fläche eben, so heisst sie *krumm*.

§. 7.

Postulat. Man kann zwischen jeden zwey Puncten eine gerade Linie ziehen, oder als gezogen denken. Eben so lässt sich jede gerade Linie beliebig rückwärts oder vorwärts verlängern, und jede Ebene beliebig im Raume erweitern.

§. 8.

Erklärung. Die *Neigung* oder *Abweichung* zweyer Linien AB und BC (Fig. 2.), die einen Punct B gemein haben, heisst ein *Winkel* (angulus). Die Linien AB und BC heissen seine *Schenkel* (crura), der Punct B sein *Scheitel* (vertex). Man bezeichnet einen Winkel entweder durch einen kleinen, zwischen die Schenkel gesetzten, Buchstaben, oder durch die drey Buchstaben an den Schenkeln, so, dass man den, am Scheitel stehenden, in die Mitte setzt. So heisst z.B. Fig. 2. der Winkel entweder x oder ABC , auch CBA , oder auch B .

I. Zusatz. Die Grösse eines Winkels, d. h. die Neigung seiner Schenkel, bleibt unverändert, man mag diese wie immer verlängern, oder abkürzen.

II. Zusatz. Gleich grosse Winkel decken sich, wenn sie auf einander gelegt werden, sind also congruent.

§. 9.

Erklärungen. a) Zwey Winkel x und y (Fig. 3.), die einen gemeinschaftlichen Schenkel AD haben, und deren beyde andere Schenkel BD und DC in eine Verlängerung fallen, heissen *Nebenwinkel* (anguli contigui vel deinceps positi).

b) Wenn eine gerade Linie AB (Fig. 4.) auf einer andern CD so aufsteht, dass sie sich weder auf die eine Seite, gegen D , noch auf die andere, gegen C , mehr neigt, so heisst jeder dieser gleichen Winkel ABC und ABD ein *rechter* (rectus), und man sagt, die Linie AB stehe *senkrecht* oder *perpen-*

dikulär auf CD , und umgekehrt. Man bezeichnet den rechten Winkel mit R .

c) Ein Winkel heißt *spitz* (acutus), wenn seine Schenkel sich mehr zusammen neigen, als die eines rechten z. B. y (Fig. 3.), im Gegentheile ist der Winkel *stumpf* (obtusus), wie z. B. x . Spitze und stumpfe Winkel heissen auch *schiefe* (obliqui). Fallen die Schenkel eines Winkels in eine gerade Linie, so heißt der Winkel ein *gerader* z. B. BDC (Fig. 3.). Nähern sich die Schenkel eines Winkels mehr gegeneinander, als die eines geraden, so heißt der Winkel *hohl* (concavus), im Gegentheile *erhaben* (convexus). In Fig. 5 ist ABC nach oben betrachtet hohl, nach unten aber erhaben.

I. Zusatz. Jeder von zwey gleichen Nebenwinkeln ist ein rechter, oder $= R$. [Erkl. b.]

II. Zusatz. Alle rechte Winkel sind congruent. (§. 8. Zus. II.)

III. Zusatz. Jeder gerade Winkel ist zwey rechten gleich, oder Fig. 4. $CBD = 2R$. [Erkl. b u. c]; denn es ist, da AB auf CD senkrecht steht, $CBD = CBA + ABD = R + R = 2R$. [Erkl. b.]

IV. Zusatz. Die Summe zweyer Nebenwinkel ist $= 2R$. d. i. $x + y = 2R$. (Fig. 3.); denn es ist

$$x + y = BDC \quad \text{und} \quad BDC = 2R. \quad [\text{Zus. III.}]$$

$$\text{Mithin} \quad x + y = 2R.$$

V. Zusatz. Alle Winkel um einen Punkt auf einer Seite einer geraden Linie sind zusammen $= 2R$. d. i. (Fig. 6.) $x + y + z = 2R$; denn es ist;

$$x + y + z = ABC \quad \text{und} \quad ABC = 2R. \quad [\text{Zus. III.}]$$

$$\text{Mithin} \quad x + y + z = 2R.$$

VI Zusatz. Alle Winkel rings um einen Punkt sind zusammen $= 4R$. d. i. (Fig. 7.) $ACB + ACD + DCB = 4R$; denn verlängert man DC über C , so ist

$$ACE + ACD = 2R. \quad \text{[Zus. V.]} \\ ECB + DCB = 2R.$$

$$\text{folgl.} \quad ACE + ECB + ACD + DCB = 4R.$$

Es ist aber $ACE + ECB = ACB$, mithin auch $ACB + ACD + DCB = 4R$.

VII. Zusatz. Wenn zwey oder mehrere aneinander liegende Winkel, wie z. B. BDC und CDA , (Fig. 8.) in ihrer Summe $2 R.$ ausmachen, so fallen ihre äussersten Schenkel BD und AD in eine gerade Linie. Denn wäre ADB keine gerade Linie, so verlängere man BD z. B. nach F , und FDB sey die gerade Linie; dann ist

$$BDC + CDA = 2 R. \text{ [verm. Voraussetz.]}$$

$$\text{und } BDC + CDF = 2 R. \text{ [Zus. IV.]}$$

Mithin wäre $BDC + CDA = BDC + CDF$ und $CDA = CDF$, welches unmöglich ist, da der Theil dem Ganzen nie gleich seyn kann.

Eben so ist es, wenn die Verlängerung von BD als durch G gehend angenommen würde.

Es muß daher ADB die gerade Linie seyn.

§. 10.

Erklärungen. a) Der Winkel, der einen andern zu einem rechten ergänzt, heist sein *Complement*; ergänzt er ihn aber zu $2 R.$, so heist er sein *Supplement*. z. B. (Fig. 9.) ist x das Complement von y , und umgekehrt; und (Fig. 3.) x das Supplement von y , oder umgekehrt y das Supplement von x .

b) *Scheitel- oder Vertikal-Winkel* (anguli verticales) sind jene zwey Winkel, die einen gemeinschaftlichen Scheitel E (Fig. 10.) haben, und wo die Schenkel des einen Winkels die verlängerten Schenkel des andern sind, z. B. o und n , oder x und y .

Zusatz. Alle Scheitelwinkel sind gleich, d. i. $o = n$; denn es ist

$$o + y = 2 R.$$

$$n + y = 2 R. \text{ [§. 9. Zus. IV.]}$$

$$\text{folgl. } o + y = n + y \text{ und}$$

$$o = n$$

Auf dieselbe Art läßt sich darthun, daß $x = y$ ist.

II. A b s c h n i t t.

Von den Figuren überhaupt, dann von den Eigenschaften der Dreyecke und der dabey vorkommenden Linien und Winkel.

§. 11.

Erklärungen. Eine von allen Seiten begrenzte Fläche

heißt eine *Figur*. Die begrenzenden Linien heißen ihre *Seiten*. Die ganze Grenze der Figur wird ihr *Umfang* oder *Perimeter* genannt. (Fig. 11.)

Man nennt die Figur nach Beschaffenheit ihrer Seiten *gerad - krumm - gemischtlinig*.

Eine gerade Linie, die in der Figur von einer Ecke zu einer andern gezogen ist, heißt *Diagonale*. So ist z. B. in der geradlinigen Figur $A B C D E$ die Linie $A C$ eine *Diagonale*.

I. Zusatz. Eine geradlinige Figur hat so viele Ecken oder Winkel, als sie Seiten hat. Denn die erste Seite bildet mit der zweyten einen Winkel, ebenso die zweyte mit der dritten den zweyten Winkel, die dritte mit der vierten den dritten Winkel etc. und die letzte Seite macht mit der ersten den letzten Winkel.

II. Zusatz. Es giebt keine geradlinige Figur von 2 Seiten.

III. Zusatz. (Fig. 12.) Wenn ein Punct A innerhalb des Umfangs einer Figur und ein anderer B außerhalb desselben liegt, und man verbindet diese beyden Puncte durch eine gerade Linie $A B$; so muß diese den Umfang der Figur wenigstens in einem Puncte C schneiden. Verlängert man diese Linie auch rückwärts über A , so muß es noch einen zweyten Durchschnittpunct D geben.

IV. Zusatz. (Fig. 13.) Wenn ein Punct A des Umfangs einer Figur innerhalb und ein zweyter B außerhalb des Umfangs einer andern Figur liegt, so schneiden sich die Perimeter dieser Figuren wenigstens in 2 Puncten C und D .

§. 12.

Erklärungen. a) Die geradlinigen Figuren heißen nach der Anzahl ihrer Seiten *Dreyecke* (triangula), *Vierecke* (tetragona), *Fünfecke* etc. Hat eine Figur mehr als 4 Seiten, so heißt sie im Allgemeinen *Vieleck* (Polygonum).

b) Sind bey einer Figur alle Seiten und Winkel gleich, so heißt sie *regulär*, im Gegentheile *irregulär*.

c) Hat ein Dreyeck alle 3 Seiten gleich, so nennt man es *gleichseitig* (aequilaterum (Fig. 14.)), hat es

nur 2 Seiten gleich, *gleichschenkelig* (*aequicrurum*) (Fig. 15). Die beyden gleichen Seiten heissen *Schenkel*, die dritte Seite ist die *Grundlinie*, und die der Grundlinie gegenüberstehende Ecke die *Spitze* des Dreyeckes. Sind in einem Dreyecke alle Seiten ungleich, so heisst es *ungleichseitig* (*scalenum*) (Fig. 16.) Man bezeichnet die Dreyecke mit den drey, an ihren Ecken stehenden, Buchstaben, welchen man das Zeichen Δ vorsetzt. z. B. ΔABC .

d) Uebrigens heissen die Dreyecke auch *rechtsumpf* - oder *spitzwinkelig*, je nachdem sie einen rechten, einen stumpfen oder lauter spitze Winkel haben. Bey den rechtwinkligen Dreyecken heissen die Seiten, die den rechten Winkel bilden, *Katheten*, die dritte Seite *Hypotenuse*.

§. 13.

Erklärungen. (Fig. 17.) a) Bewegt sich eine gerade Linie AB um einen ihrer Endpunkte A so lange, bis sie wieder in ihre vorige Lage kömmt, so entsteht eine *Kreisfläche* oder ein *Kreis* (*circulus*). Der Punct A heisst *Mittelpunct* (*centrum*), und die Linie AB der *Halbmesser* (*radius*) des Kreises. Die krumme Linie, die der Punct B beschreibt heisst *Peripherie* oder *Umkreis* (*circumferentia*), ein Theil davon ein *Bogen* (*arcus*). Jede gerade Linie, z. B. DE , die von einem Puncte der Peripherie bis zu einem andern in derselben gezogen ist, heisst *Sehne* (*chorda*). Geht die Sehne durch den Mittelpunct, so nennt man sie *Durchmesser* (*diameter*). Jene gerade Linie, welche mit der Peripherie nur einen Punct gemein hat, übrigens, wie immer verlängert, ganz ausserhalb des Kreises liegt, heisst *Tangente* z. B. FH , und eine ausserhalb den Kreis verlängerte Sehne eine *Secante* z. B. DI .

b) Ein *Kreis-Abschnitt* (*segmentum*) ist ein Theil des Kreises, der durch eine Sehne und einen Bogen begrenzt wird, wie z. B. (Fig. 17.) DGE .

c) Ein *Kreis-Ausschnitt* (*sector*) ist ein Theil des Kreises, der durch 2 Radien und den dazwischenliegenden Bogen begrenzt wird z. B. ABC .

d) Zwey Kreise, die einerley Mittelpunct haben,

heissen *concentrisch* (Fig. 18.) Haben die Kreise verschiedene Mittelpuncte, so sind sie *excentrisch*. Die gerade Linie zwischen den Mittelpuncten zweyer Kreise heisst *Centrallinie*.

I. Zusatz. Alle Radien desselben Kreises sind gleich-groß, und der Diameter ist zwey Radien gleich.

II. Zusatz. Alle Kreise, deren Radien oder Durchmesser gleich groß sind, sind congruent; denn sie decken sich, aufeinandergelegt, vollkommen.

III. Zusatz. Alle congruenten Kreise haben gleiche Radien oder Diameter.

IV. Zusatz. Der Diameter theilt jeden Kreis, so wie seine Peripherie, in 2 congruente Theile. Denn, man lege (Fig. 19.) den Theil ABC so auf ADC , daß A auf A und E auf E zu liegen kömmt, dann muß C in C fallen. Es müssen aber auch alle Theile von ABC genau auf ADC liegen; denn, gesetzt ein Punct von ABC fiel ausserhalb ADC , so gehörte zu ihm ein grösserer, und gesetzt er fiel innerhalb, ein kleinerer Radius; gegen Zus. I.

V. Zusatz. Eine gerade Linie schneidet den Kreis nur in 2 Puncten. [§. 11. Zus. III.]

§. 14.

Postulat. Aus jedem Puncte kann man mit jedem Radius einen Kreis beschreiben.

§. 15.

Lehrsatz. In jedem Dreyecke ist die Summe je zweyer Seiten grösser als die dritte.

Beweis. Betrachtet man (Fig. 14.) im $\triangle ABC$ die gerade Linie AB , so ist sie als solche die kürzeste zwischen A und B [§. 5.]. Die gebrochene Linie ACB muß daher länger seyn als die gerade AB [§. 5.]; daher $AB < AC + CB$. Eben so ist auch $AC < AB + BC$ und $BC < AC + AB$.

§. 16.

Aufgabe. (Fig. 20.) Ueber eine gegebene gerade Linie AB ein gleichseitiges Dreyeck zu construiren.

Auflösung. Man beschreibe aus A und B mit den Radien AB und BA Kreise [§. 14.], und ziehe nach ihren gemeinschaftlichen Durchschnits-Punct C die

len, indem $ab = AC$ und $ac = AB$ ist. Beyde Drey-
ecke decken auch in dieser Lage [Lehrs.], und es ist

$abc = ACB$; aber gemäfs des Lehrsatzes auch

$$abc = ABC$$

folgl. $ACB = ABC$ d. h.

IV. Zusatz. In jedem gleichschenkligen Dreyecke ABC sind die Winkel an der Grundlinie gleich. Denn man kann sich eben dieses Dreyeck noch ein Mahl vorstellen (als $\triangle abc$), und wie im vorigen Zusatze verfahren.

V. Zusatz. In jedem gleichseitigen Dreyecke sind alle drey Winkel gleich; denn es ist auch gleichschenkl., man mag was immer für eine Seite als Grundlinie annehmen [Zus. IV.]. Das gleichseitige Dreyeck ist eine reguläre Figur [§. 12. b.]

§. 19.

Lehrsatz. (Fig. 23.) Wenn in einem Dreyecke zwey Winkel gleich sind, so ist es gleichschenkl., d. i. die beyden, den gleichen Winkeln entgegenstehenden, Seiten sind gleich.

Beweis. *) *Thesis.* $AB = AC$

*) *Daten.* $ABC = ACB$

Kann man zeigen, dafs AB unter diesen Bedingungen weder grösser noch kleiner als AC ist, so ist der Lehrsatz bewiesen, **)

*) *Thesis* (oder *Th.*) bedeutet den zu beweisenden Satz, *Daten* (oder *Dat.* auch *D.*) aber die gegebenen Bedingungen des Lehrsatzes und die Eigenschaften, die in der Figur sich finden, oder durch Construction zum Behufe des Beweises hineingelegt werden. Der Deutlichkeit und genauen Uebersicht wegen ist es nöthig *Th.* und *D.* bey jedem Lehrsatze auszuscheiden und anzusetzen.

**) Man nennt diese Beweis - Art *indirect*, indem man die Wahrheit des Satzes dadurch darthut, dafs man zeigt, das Gegentheil desselben sey unmöglich; weil daraus sich Folgerungen ergeben, die anerkannten Wahrheiten geradezu widersprechen.

Wäre $AB > AC$ so schneide man von AB ein Stück $BD = AC$ ab, und ziehe DC , so müßte,

$$\text{da } BC = BC$$

$$BD = AC$$

$$DBC = ACB \text{ [verm. Daten.] ist,}$$

auch $\triangle BDC \cong \triangle ABC$ [§. 18.] seyn, welches unmöglich ist, da ein Theil dem Ganzen nie gleich seyn kann.

Auf einen gleichen Widerspruch stößt man durch dasselbe Verfahren, wenn man $AB < AC$ annimmt. Da es nun unmöglich ist, daß $AB >$ oder $< AC$ ist, so muß $AB = AC$ seyn.

Zusatz. Ein Dreyeck, welches drey gleiche Winkel hat, ist gleichseitig.

§. 20.

II C. Lehrsatz. (Fig. 24.) Zwey Dreyecke sind congruent, wenn in ihnen jede Seite des einen einer Seite des andern gleich ist.

Beweis. Thes. $\triangle ABC \cong \triangle abc$.

Daten. $AB = ab$, $BC = bc$, $AC = ac$

Würste man, daß $BAC = bac$ ist, so wären beyde Dreyecke nach §. 18. congruent. Dieß läßt sich aber darthun; nemlich:

Man lege das $\triangle abc$ an das $\triangle ABC$, so, daß b in B und bc auf BC fällt, das Dreyeck aber die entgegengesetzte Lage vom $\triangle ABC$ erhält. Das dahin gelegte Dreyeck abc werde durch das $\triangle BCD$ vorgestellt. Man ziehe AD , so ist

$$AB = ab = BD \text{ folgl. } o = n \text{ [§. 18. Zus. IV.]} \text{ ebenso}$$

$$AC = ac = DC \text{ „ } x = m \text{ [§. 18. Zus. IV.]}$$

$$\text{Mithin } o + x = n + m \text{ oder}$$

$$BAC = BDC$$

$$= bac.$$

Da nun die Dreyecke ABC und abc nebst diesen Winkeln auch die einschliessenden Seiten gleich haben, so sind sie nach §. 18. congruent.

Zusatz. Durch die drey Seiten eines Dreyeckes ist dasselbe vollkommen bestimmt.

§. 21.

Aufgaben. (Fig. 22.) 1) Einen gegebenen Winkel ABC nachzuzeichnen.

Auflösung. Man ziehe AC , und construiere aus AB , AC und BC das Dreyeck abc (§. 17.), so ist abc der verlangte Winkel.

Beweis. Es ist $ab = AB$

$$ac = AC$$

$$bc = BC$$

folgl. $\triangle abc \cong \triangle ABC$ [§. 20.]

und $abc = ABC$ [§. 18. Zus. II.]

2) Einen gegebenen geradlinigen Winkel zu halbiren.

Auflösung. Der gegebene Winkel sey ABC (Fig. 25.) Man schneide die gleichen Stücke BD und BE von den Schenkeln ab, ziehe DE , errichte darüber das gleichschenklige $\triangle DEF$ [§. 17], worin $DF = EF$ ist, und ziehe BF , so halbirt diese Linie den Winkel, und es ist $o = x = \frac{1}{2} ABC$.

Beweis. Daten. $BD = BE$

$$DF = FE \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{[vermöge d. Construct.]} \\ BF = BF \end{array} \right.$$

Mithin $\triangle BDF \cong \triangle BEF$. [§. 20.]

und $o = x$ [§. 18. Zus. II.]

§. 22.

Aufgabe. (Fig. 26.) Eine gegebene gerade Linie zu halbiren.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB . Man errichte darüber ein gleichschenkliges $\triangle ABC$ [§. 17.] und halbire durch CD den Winkel ACB [§. 21. 2.], so muß $AE = EB$ seyn.

Beweis. Dat. Es ist $AC = CB$

$$o = n$$

$$CE = CE$$

} gemäß d. Construction.

daher $\triangle ACE \cong \triangle CBE$ [§. 18.] und folgl.

$AE = EB$ [§. 18. Zus. II.]

§. 23.

Aufgaben. 1) In einem gegebenen Punkte C einer geraden Linie AB auf dieser eine senkrechte zu errichten. (Fig. 27.)

2) Von einem gegebenen Punkte C auf die gerade Linie AB eine senkrechte zu fallen (Fig. 28.)

Auflösung. Man beschreibe aus C einen Kreis, der AB in M und N schneidet [§. 13. Zus. V.], und über MN das gleichschenklige Dreyeck MND in Aufg. Nro. 1 ober-, und in Nro. 2 unterhalb MN , so muß DC senkrecht auf AB stehen, oder

Beweis. *Thes.* $o = n \Rightarrow R$. seyn

Dat. ad 1) $MC = CN$ [§. 13. Zus. I.]

$MD = DN$

$CD = CD$

also $\triangle MCD \cong \triangle CDN$ [§. 20.]

und $o = n \Rightarrow R$ [§. 18. Zus. II. u.]

[§. 9. Zus. I.]

ad 2) $MC = CN$ [§. 13. Zus. I.]

$x = y$ [§. 21. 2.]

$CE = CE$

daher $\triangle MCE \cong \triangle CEN$ [§. 18.]

und $o = n \Rightarrow R$ [§. 18. Zus. II.] und

[§. 9. Zus. I.]

I. Zusatz. (Fig. 27.) Eine gerade Linie CD , die aus der Mitte der Grundlinie C eines gleichschenkligen Dreyeckes MDN nach dessen Spitze gezogen ist, halbirt das gleichschenklige Dreyeck (denn es ist nach Beweis 1. $\triangle MCD \cong \triangle CDN$ folglich $= \frac{1}{2} \triangle MDN$), so wie auch den Winkel an der Spitze (nemlich $z = p = \frac{1}{2} MDN$, nach §. 18. Zus. II.), und steht auf der Grundlinie senkrecht, da $o = n \Rightarrow R$ ist.

II. Zusatz. (Fig. 27.) Beschreibt man aus D mit $DM = DN$ einen Kreis, so erscheint MN als Sehne und vermöge *I Zus.* steht eine gerade Linie, die aus der Mitte C einer Sehne nach dem Mittelpuncte des Kreises gezogen ist, auf der Sehne senkrecht, und halbirt den Winkel des Ausschnitts [§. 13. c.]

III. Zusatz. (Fig. 28.) Eine gerade Linie CE , die den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreyeckes MCN halbirt, halbirt das Dreyeck selbst (denn es ist nach Beweis 2. $\triangle MCE \cong \triangle CEN$ folglich $= \frac{1}{2} \triangle MCN$), und seine Grundlinie (denn es ist $ME = EN$ [§. 18. Zus. II.]), und steht auf ihr senkrecht (da $o = n \Rightarrow R$ ist).

IV. Zusatz. (Fig. 28.) Vermöge des *III Zus.* halbirt

eine gerade Linie, die den Winkel des Ausschnitts MCN halbirt, auch die Sehne des Ausschnitts und steht auf ihr senkrecht.

§. 24.

Lehrsatz. Wenn man aus der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyeckes eine senkrechte auf derselben errichtet, so geht sie durch die Spitze des Dreyeckes.

Beweis. (Fig. 29.) Gesetzt, die senkrechte ginge nicht durch die Spitze A , sondern z. B. wie DE , so wäre $EDB = R.$ [§. 9. b.] Man ziehe AD , dann ist $ADB = R.$ [§. 23. Zus. I.] Folgl. wäre $ADB = EDB$, welches unmöglich ist.

Auf denselben Widerspruch kömmt man, wenn man statt DE die Lage FD annimmt.

Da nun die senkrechte weder rechts noch links von A vorbegehen kann, so muß sie durch A selbst gehen.

I Zusatz. Eine senkrechte, auf der Mitte einer Sehne errichtet, muß, gehörig verlängert, durch den Mittelpunkt des Kreises gehen.

II Zusatz. Auf einer geraden Linie giebt es in einem Punkte nur eine senkrechte.

§. 25.

Erklärung. Wenn man in einem Dreyecke ABC (Fig. 30.) eine Seite verlängert, so heisst der dadurch entstehende Winkel ausserhalb des Dreyeckes, nemlich o , der äussere, den innern y und z entgegengesetzte, und x der innere anliegende, Winkel.

§. 26.

Lehrsatz. Wenn man in einem Dreyecke eine Seite verlängert, so ist jedesmal der äussere Winkel grösser als jeder der inneren entgegengesetzten.

Beweis. (Fig. 31.) *Thes.* 1) $ACD > BAC.$

2) $ACD > ABC.$

Dat. ad 1) Man halbire AC , so ist $CE = AE$, ziehe BE u. mache dessen Verlängerung $EF = BE$. Zieht man ferner FC , so ist auch $o = n$ [§. 10. Zus.]

Mithin $\triangle EFC \cong \triangle AEB$ [§. 18]

und $ACF = BAC$ [§. 18. Zus. II.]

Es ist aber $ACF < ACD$, als Theil vom Ganzen,

folgl. $BAC < ACD$

ad. 2) Man verlängere AC über C , so ist

$ACD = BCG$ [§. 10. Zus.]. Es ist aber

auch $ABC < BCG$ [vermöge 1.; denn ABC hat in Bezug auf BCG dieselbe Lage als BAC in Bezug auf ACD]

folgl. $ACD > ABC$.

Zusatz. (Fig. 32.) In einem Dreyecke, das einen rechten Winkel hat, sind die beyden andern spitz; denn sie müssen kleiner seyn, als der äussere entgegengesetzte, der ebenfalls ein rechter ist [§. 9. Z. IV.].

§. 27.

Lehrsatz. (Fig. 33.) In jedem Dreyecke ist die Summe je zwey und zweyer Winkel kleiner als 2 rechte.

Beweis. Thes. 1) $x + z < 2 R$. 2) $y + z < 2 R$.

3) $x + y < 2 R$.

Daten. Man verlängere BC über C u. B , so ist:

ad 1) $x < o$ [§. 26.] | ad 2) Es ist $y < o$ [§. 26.]

$\frac{z = z}{\text{folgl. } x + z < o + z}$	$\frac{z = z}{\text{Mithin } y + z < o + z}$
$< 2 R$. [§. 9. Z. IV.]	$< 2 R$. [§. 9. Z. IV.]

ad 3) Es ist $x < m$ [§. 26.]

$\frac{y = y}{\text{Also } x + y < m + y}$
$< 2 R$. [§. 9. Zus.]

I. Zusatz. Ein Dreyeck kann nur einen rechten, und auch nur einen stumpfen Winkel haben.

II. Zusatz. Man kann von einem Punkte auf eine gerade Linie nur eine senkrechte fallen; denn sonst entstände ein Dreyeck mit zwey rechten Winkeln.

§. 28.

Lehrsatz. (Fig. 34.) In jedem Dreyecke steht der grössere Winkel der grössern Seite gegenüber.

Beweis. Th. $ABC > C$

Daten. $AC > AB$. Man trage AB , von A aus, auf AC auf, so, dafs $AD = AB$ wird, so muß, wenn man BD zieht,

$o = n$ seyn [§. 18. Zus. IV.].

Es ist aber $n > C$ [§. 26.].

Mithin auch $o > C$.

Nun ist $o < ABC$, als Theil;

folglich muſs $ABC > C$ seyn.

I. Zusatz. In jedem Dreyecke steht dem grössern Winkel die grössere Seite gegenüber, d. i. [Fig. 34.] wenn $ABC > C$ ist, so muſs $AC > AB$ seyn; denn wären beyde Seiten gleich, so müſsten es auch die Winkel ABC und C seyn [§. 18. Zus. IV.], und wäre $AC < AB$, so müſste dem Lehrsatz gemäſs $ABC < C$ seyn. Da nun unter der Voraussetzung, daſs $ABC > C$ ist, die Seite AC weder mit AB gleich, noch kleiner seyn kann als AB , so muſs sie grösser als AB seyn.

II. Zusatz. In jedem rechtwinkligen Dreyecke ist die Hypotenuse grösser als jede Kathete, und im stumpfwinkligen die Seite die grölste, die dem stumpfen Winkel gegenübersteht. [Zus. I.]

III. Zusatz. Die senkrechte ist die kürzeste gerade Linie, die man von einem Punkte nach einer geraden Linie ziehen kann [Zus. II.], denn jede andere ist Hypotenuse. Man bedient sich der senkrechten zur Bestimmung der Entfernung eines Punctes von einer geraden Linie. So ist die Höhe eines Dreyeckes die senkrechte von der Spitze auf die Grund-Linie.

§. 29.

Aufgabe. Ein Dreyeck zu construiren, das mit einem gegebenen congruent ist.

Die Auflösung dieser Aufgabe geschieht wie §. 17.; den Beweis gibt §. 20.

Zusatz. Um eine geradlinige Figur nachzuzeichnen zerfalle man sie durch Diagonalen, welche sich nicht schneiden, in Dreyecke, und setze durch das Zeichnen der einzelnen Dreyecke die Figur zusammen, welche dann mit der gegebenen congruent ist.

§. 30.

III. Lehrsatz. (Fig. 35.) Zwey Dreyecke sind congruent, wenn sie zwey Seiten und den der grössern der-

selben gegenüberstehenden Winkel gegenseitig gleich haben.

Beweis. Thes. $\triangle ABC \cong \triangle abc$.

Dat. $AB = ab$, $AC = ac$, $B = b$, $AC > AB$,
 $ac > ab$.

Man lege das Dreyeck abc so auf das Dreyeck ABC ,
dass b in B und ab in die Richtung von AB , also
 a in A fällt, weil $ab = AB$ ist; auch fällt dann bc
in die Richtung von BC , indem $B = b$ ist.

Nun muß, weil auch $AC = ac$ ist, der Punct c in C
fallen; denn gesetzt er fiel nicht in C , so müßte er

a) entweder zwischen B und C , oder

b) in die Verlängerung von BC fallen. Jedoch,

weder des Eine noch das Andere kann seyn. Denn,

ad. a) fiel c zwischen B und C z. B. in D , so,
dass $BD = bc$ ist, und zieht man AD , so ist

auch $AB = ab$ und

$B = b$. Es wäre

folgl. $\triangle ABD \cong \triangle abc$ [§. 18.], und daher

auch $AD = ac = AC$ [§. 18. Zus. II.]

also $o = n$ [§. 18. Zus. IV.], und

da $o > B$ [§. 26.], so wäre

auch $n > B$ mithin

$AB > AC$ [§. 28. Zus. I.], welches der Vorausset-
zung $AC > AB$ widerspricht.

ad b) Fiele c in die Verlängerung von BC z. B. in
 E , so, dass $BE = bc$ ist, und zieht man AE , so ist

auch $AB = ab$

$B = b$, folglich wäre

$\triangle ABE \cong \triangle abc$, und daher

$AE = ac = AC$ [§. 18. Zus. II.]. Dann müßte

aber $x = m$ [§. 18. Zus. IV.], und da

$m > B$ [§. 26.] ist, auch

$x > B$ seyn, folglich wäre

$AB > AE$ [§. 28. Zus. I.] u., da $AE = AC$,

auch $AB > AC$, gegen die Voraussetz. $AC > AB$.

Es muß also c in C fallen, und

$BC = bc$ seyn. Es ist aber

auch $AB = ab$ [Daten.], und

$$B = b \text{ [---]}. \quad \text{---}$$

Mithin $\triangle ABC \cong \triangle abc$ [§. 18.].

I Zusatz. Durch zwey Seiten und den, der grösseren derselben gegenüberstehenden, Winkel ist ein Dreyeck vollkommen bestimmt.

II. Zusatz. Rechtwinklige Dreyecke sind congruent, wenn sie nebst der Hypotenuse auch eine Kathete gleich haben.

III. Zusatz. Wenn man aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreyeckes auf die Grund-Linie eine senkrechte fällt, so theilt diese den Winkel an der Spitze, die Grundlinie und das Dreyeck in zwey gleiche Theile; denn in Fig. 36. ist $\triangle ABD \cong \triangle ADC$, weil $\angle o = \angle n = R$ (verm. Constr.) und $AB = AC$, dann $AD = AD$ ist [Zus. II.]; folglich muß $\angle x = \angle y$ und $BD = DC$ [§. 18. Zus. II.] seyn.

IV Zusatz. Wenn man vom Mittelpuncte eines Kreises eine Senkrechte auf eine Sehne fällt, so halbirte sie die Sehne und den Winkel des Ausschnitts. [Zus. III.].

§. 31.

Lehrsatz. (Fig. 35.) Zwey Dreyecke sind congruent, wenn in ihnen gegenseitig eine Seite und zwey gleichliegende Winkel gleich sind.

Beweis. Thesis. $\triangle ABC \cong \triangle abc$.

Es finden hier zwey Fälle Statt, nemlich:

a) entweder liegen beyde gleiche Winkel an der gegebenen Seite, oder

b) es liegt nur einer daran.

ad a) *Daten.* $AB = ab$, $B = b$, $BAC = bac$.

Man lege das Dreyeck abc so auf das Dreyeck ABC , daß a in A , und ab in die Richtung von AB fällt, so muß, da $AB = ab$ ist, b in B fallen. Weil $a = A$, und $b = B$ ist, so muß ac in die Richtung von AC und bc in die von BC fallen, und

$$BC = bc \text{ seyn,}$$

Denn BC kann unter den Bedingungen des Lehrsatzes weder grösser noch kleiner als bc seyn.

Wäre $BC > bc$, z. B.
 $BD = bc$, und zieht
 man AD ,

so ist $AB = ab$ } [Dat.]
 und $B = b$ }

Mith. $\triangle ABD \cong \triangle abc$. [§. 18.]

Folglich
 müßte $BAD = bac$ [§. 18.
 Z. II.]

und $BAD = BAC$ [Dat.]
 seyn, welches unmöglich
 ist, da BAD ein Theil von
 BAC ist.

Es muß also $BC = bc$ seyn.

Auch ist $AB = ab$ } [Daten]
 und $B = b$ }

Mithin $\triangle ABC \cong \triangle abc$ [§. 18.] (Beweis für a.).

ad b) Daten. $AB = ab$, $B = b$, $ACB = acb$.
 Auch hier lege man das $\triangle abc$ so auf das $\triangle ABC$,
 daß der Punct a in A , ab in die Richtung von AB ,
 folglich b auf B fällt, da $ab = AB$ ist. Es muß
 dann bc in die Richtung von BC fallen, denn es ist
 der Winkel $b = B$, und da auch $ACB = acb$ ist, so
 muß der Punct c in C fallen, oder

$BC = bc$ seyn;

denn auch hier kann unter den Bedingungen des Lehr-
 satzes BC weder grösser noch kleiner als bc seyn.

Wäre $BC > bc$, z. B.
 $BD = bc$, und zieht
 man AD ,

so ist $AB = ab$ } [Dat.]
 und $B = b$ }

$\triangle ABD \cong \triangle abc$ [§. 18],
 und es wäre
 auch $ADB = acb$ [§. 18.
 Zus. II.]

und $ADB = ACB$ [Dat.],
 welches dem Lehrsatz §.
 26. widerspricht.

Wäre $BC < bc$, z. B.
 $BE = bc$, und zieht
 man AE ,

so ist $AB = ab$ } [Dat.]
 und $B = b$ }

Dah. $\triangle ABE \cong \triangle abc$. [§. 18.]

Folglich
 müßte $BAE = bac$ [§. 18.
 Z. II.]

und $BAE = BAC$ [Dat.]
 seyn, welches ebenfalls un-
 möglich ist, da BAC ein Theil
 von BAE ist.

Wäre $BC < bc$ z. B.
 $BE = bc$, und zieht
 man AE ,

so ist $AB = ab$ } [Daten.]
 und $B = b$ }

$\triangle ABE \cong \triangle abc$ [§. 18.],
 und es
 wäre $AEB = acb$ [§. 18.
 Zus. II.]

und $AEB = ACB$ [Dat.],
 ebenfalls gegen §. 26.

Es muß also $BC = bc$ seyn, und
 da $AB = ab$
 $B = b$ } [Daten] ist,

so ist auch hier $\triangle ABC \cong \triangle abc$. [§. 18.] (Bew. für b.)

/III. A b s c h n i t t.

Von den Parallellinien.

§. 32.

Erklärungen. Parallellinien sind gerade in einer Ebene befindliche Linien, die in allen Puncten gleichen Abstand von einander haben, welcher Abstand durch eine senkrechte von irgend einem Puncte der einen auf die andere gemessen wird. [§. 28. Zus. III.] *)

Diese gleichen Abstände geben zu erkennen, daß Parallelen nie zusammen stossen, wenn sie auch beyderseits wie immer verlängert werden.

Das Zeichen des Parallelseyns zweyer Linien ist $\#$ z.B. $AB \# CD$ (Fig. 37.). Wenn zwey Parallelen (Fig. 38.) AB und CD von einer geraden EF durchschnit-

*) In dieser Erklärung liegt das Axiom zum Grunde, daß die Linie, welche durch die Endpuncte aller, auf einer geraden Linie errichteten, gleich grossen, Perpendikel geht, eine gerade sey. Dieses Axiom möchte darin vor dem Euklidischen einen Vorzug haben, daß die Vorstellungskraft nicht genöthigt ist, sich in's Unendliche zu verlieren, und daß es unmittelbar mit dem Begriffe von einer geraden Linie zusammenhängt. Denn in der geraden Linie haben alle Puncte einerley Lage gegeneinander, in so ferne man auf ihre Abstände nicht achtet [§. 4]; die darauf senkrechten geraden haben einerley Lage gegen dieselbe; die Endpuncte dieser gleich groß genommenen senkrechten haben also auch einerley Lage untereinander, gleich den Puncten auf jener, und liegen daher in einer geraden Linie.

ten werden, so entstehen 8 Winkel, wovon x , y , m und o die *innern*, dann n , s , t und u die *äussern* heissen. y und o , dann x und m sind *innere*, s und u , dann n und t *äussere auf einer Seite liegende Winkel*. x und o , so auch y und m sind *innere*, s und t , so wie n und u *äussere Wechselwinkel*. Endlich hat man auch *äussere und innere entgegengesetzte Winkel*, als s und o , n und m , t und x , u und y .

§. 33.

Lehrsatz. Steht eine gerade Linie auf einer von zwey parallelen senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

Beweis. (Fig. 37.) *Thesis.* $m = n = R$.

Daten. $AB \parallel CD$, $EFC = EFD = R$. Man mache $FG = FH$, und errichte IG und KH auf CD senkrecht, so ist auch

$IGF = KHF = R$, und, da $AB \parallel CD$, auch $IG = KH$ [§. 32.], zieht man IF u. KF , so ist, weil auch $FG = FH$ [Constr.] ist,

$\triangle IGF \cong \triangle KHF$ [§. 18.], mithin

$o = x$ und $IF = KF$ [§. 18. Zus. II.].

Es ist auch $o + y = z + x = R$ [Daten].

$$\underline{o = x}$$

Also $y = z$, dann

$$IF = KF$$

$$EF = EF$$

folgl. $\triangle IEF \cong \triangle KEF$ [§. 18.], und

$m = n = R$ [§. 18. Zus. II. u. §. 9. Z. I.]

Zusatz. Es sind also IG , EF und KH die Abstände sowohl der Linie AB von CD , als auch der Linie CD von AB .

§. 34.

Lehrsatz. Wenn zwey parallele Linien, AB und CD , (Fig. 38.) durch eine dritte EF geschnitten werden, so sind

I. die Wechsel - Winkel gleich,

II. der äussere und innere entgegengesetzte Winkel gleich,

III. die zwey innern, auf einer Seite liegenden, Winkel zusammen genommen zwey rechten gleich.

Beweis. ad I, *Th.* $x = o$.

Dat. $AB \parallel CD$. Man halbire GH , fälle von L auf CD die Senkrechte LK , und verlängere sie bis I ; so muß diese Linie auch auf AB senkrecht stehen [§. 33]. Es ist dann

$$LIG = LKH = R.$$

$$GL = LH \text{ [Daten.]}$$

$$ILG = HLK. \text{ [§. 10. Zus. I.]}$$

Mithin $\triangle LIG \cong \triangle LKH$ [§. 31.], und

folglich $x = o$. [§. 18. Zus. II.]

ad II, *Thes.* $s = o$.

Dat. $AB \parallel CD$. Es ist $s = x$. [§. 10. Zus.]

$$x = o \text{ [I.]}$$

$$\text{also } s = o.$$

ad III. *Thes.* $o + y = 2 R$.

Dat. $AB \parallel CD$. Es ist $x + y = 2 R$ [§. 9. Z. IV.],

da aber $x = o$ [I.] ist, so muß

auch $o + y = 2 R$ seyn.

I. *Zusatz.* Schneidet EF die Parallelen so, daß ein Winkel ein rechter ist, so sind auch alle übrigen rechte.

II. *Zusatz.* Zwey Winkel, deren Schenkel je zwey und zwey parallel laufen, sind gleich, d. i. (Fig. 39.) $ACB = DFE$, wenn $AC \parallel DF$ und $BC \parallel EF$ ist; denn, zieht man durch F und C die Linie GF , so ist

$$\left. \begin{array}{l} o = n \\ \text{und } x = y. \end{array} \right\} \text{ [Lehrs. II.]}$$

Mithin $o + x = n + y$, oder $ACB = DFE$,

§. 35.

Lehrsatz. (Fig. 40.) Wenn zwey gerade Linien, AB und CD , durch eine dritte EF geschnitten werden, so, daß

I. die Wechselwinkel, o und x , gleich sind, oder

II. der äussere s dem innern entgegengesetzten o gleich ist, oder, daß

III. die beyden innern, auf einer Seite liegenden, Winkel y und o zusammen $= 2 R.$ sind; so sind die Linien AB und CD parallel.

Beweis. ad I. Thes. $AB \parallel CD$.

Daten. $x = o$. Man fälle GH senkrecht auf CD , und mache $IG = KH$, ziehe dann IK , so ist, da $KG = KG$,

$\triangle IGK \cong \triangle KGH$ [§. 18.], und daher $IK = GH$ [§. 18. Zus. II.], und $I = H = R.$ [„ „].

Daher $AB \parallel CD$ [§. 32.], denn beyde Linien haben gleiche Abstände IK und GH .

ad II. Thes. $AB \parallel CD$.

Dat. $s = o$. Es ist aber $s = x$ [§. 10. Zus.].

Also auch $o = x$, folglich $AB \parallel CD$ [I.].

ad III. Thes. $AB \parallel CD$.

Daten. $y + o = 2 R.$ Es ist aber auch $y + x = 2 R.$ [§. 9. Zus. IV.].

Mithin $y + o = y + x$ und $o = x$, folgl. $AB \parallel CD$ [I.].

I. Zusatz. Durch einen Punct G (Fig. 41.) giebt es zu CD nur eine Parallele, denn wäre z. B. ausser AB auch ab durch G parallel zu CD , so müßte, wenn man EF durch G zieht,

$y + BGF = 2 R. = y + bGF$ [§. 34. III.], mithin $BGF = bGF$ seyn, welches unmöglich ist.

II. Zusatz. Zwey gerade Linien, die zu einer dritten parallel sind, sind es auch unter sich, d. i. wenn (Fig. 41.) $AB \parallel CD$, und $KI \parallel CD$ ist, so muß, wenn man sie durch EF schneidet, $x = y$ und $z = y$ [§. 34. II.], folglich $x = z$, und daher $AB \parallel KI$ seyn [Lehrs. II.].

III. Zusatz. Wenn zwey gerade Linien, ab und CD , (Fig. 41.) von einer dritten EF geschnitten werden, und die Summe der innern, auf einer Seite liegenden, Winkel d. i. $GHD + HGb < 2 R$ ist, so

müssen sich ab und CD , auf der Seite bey b und D , gehörig verlängert, schneiden. Denn, schnitten sie sich nicht, so müßten sie entweder auseinander gehen, oder parallel seyn. Zieht man, durch G , $AB \nparallel CD$, so ergiebt sich, daß ersteres unmöglich ist, da $BGH > bGH$, folglich bG zwischen GB und HD fällt. Auch das Letztere kann nicht Statt finden, denn sonst gäbe es durch G zwey Parallelen zu CD , (gegen den I. Zus.).

§. 36.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punct G (Fig. 42.) zur Linie CD eine parallele zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe von G nach CD die Linie GF , und trage den Winkel y , in G auf der entgegengesetzten Seite, an FG auf [§. 21. nro. I.], so, daß $o = y$ wird, und verlängere AG ; so ist $AB \parallel CD$, gemäß §. 35. I.

§. 37.

Lehrsatz. Wenn man in einem Dreyecke eine Seite verlängert, so ist der äussere Winkel so groß, als die Summe der beyden innern entgegengesetzten.

Beweis. (Fig. 43.) *Th.* $ACD = x + y$.

Dat. Man ziehe durch C die Linie $CE \parallel AB$, so ist $x = o$ [§. 34. I.], und auch $y = n$ [§. 34. II.].

Mithin $x + y = o + n = ACD$.

§. 38.

Lehrsatz. In jedem Dreyecke ist die Summe aller Winkel $= 2 R$.

Beweis. (Fig. 30.) *Th.* $y + z + x = 2 R$.

Dat. Man verlängere BC , so ist

$y + z = o$ [§. 37.]

$x = x$.

Daher $y + z + x = o + x = 2 R$. [§. 9. Zus. IV.]

I. Zusatz. Wenn zwey Winkel eines Dreyeckes bekannt sind, so ist es auch der dritte. Im gleichschenkligen Dreyecke sind durch einen Winkel alle übrigen gegeben.

II. Zusatz. Wenn in zwey Dreyecken zwey Winkel gleich sind, so sind es auch die dritten.

III. Zusatz. In jedem rechtwinkligen Dreyecke sind die zwey Winkel an der Hypotenuse zusammen ~~zwey~~ ^{nimm} rechten gleich. Ist das rechtwinklige Dreyeck gleichschenkelig, so ist jeder Winkel an der Hypotenuse $= \frac{1}{2} R$.

IV. Zusatz. Im gleichseitigen Dreyecke ist jeder Winkel $= \frac{2}{3} R$.

§. 39.

Lehrsatz. Die Summe S aller Winkel eines jeden Vieleckes von n Seiten ist $(n-2) 2 R$ d. h. so viele Mahl $2 R$ als die, um 2 verminderte, Anzahl der Seiten ausdrückt.

Beweis. (Fig. 44.) *Th.* $S = [n-2] 2 R$.

Dat. Man ziehe in der Figur von einem Punkte M nach alle Ecken derselben gerade Linien, so entstehen so viele Dreyecke, als die Figur Seiten hat, d. i. n Dreyecke. Nun halten die Winkel von n Dreyecken zusammen $n \cdot 2 R = 2 n R$ [§. 38.]. Es gehören aber die Winkel um M (welche $= 4 R$ sind [§. 9. Zus. VI.]) nicht zum Polygone; sie müssen also, um die Polygons-Winkel allein zu erhalten, von obigen $2 n R$ abgezogen werden, und dann entsteht

$$S = 2 n R - 4 R = [n-2] 2 R.$$

I. Zusatz. In jedem Vierecke ist $S = 4 R$, welchen Werth man erhält, wenn man in obiger Formel $n=4$ setzt.

II. Zusatz. Ist die Figur regulär, so ist jeder Winkel $A = \frac{S}{n} = \frac{n-2}{n} 2 R = [1 - \frac{2}{n}] 2 R = [2 - \frac{4}{n}] R$.

III. Zusatz. In allen geradlinigen Vielecken, von gleich vielen Seiten, sind die Summen aller Winkel immer gleich.

§. 40.

Aufgabe. (Fig. 45.) Am Ende einer geraden Linie AB eine senkrechte zu errichten.

Auflösung. Man nehme in AB den Punkt E beliebig, und errichte über AE ein gleichschenkliges Dreyeck ACE [§. 17.], verlängere CE so, daß $DC = CE$ wird, und ziehe AD , so ist diese auf AB senkrecht.

Beweis. Th. $DAB = R.$

Daten. $AC = CE = DC$ [Constr.]. Daher

$$\text{und } \begin{matrix} n = y \\ o = x. \end{matrix} \quad [\S. 18. \text{Zus. IV.}]$$

$$\text{Mithin } n + o = y + x.$$

Es ist aber $(n + o) + (y + x) = 2 R.$ [$\S. 38.$]

Mithin auch $(n + o) + (n + o) = 2 R.$, oder

$$2 (n + o) = 2 R., \text{ also}$$

$$n + o = DAB = R.$$

IV. A b s c h n i t t.

Von den Eigenschaften der Parallelogramme.

$\S. 41.$

Erklärungen. Ein Viereck heißt

- 1) ein *Parallelogramm*, wenn darin jede zwey gegenüberstehende Seiten parallel sind. (Fig. 46. 47. 48. 49.)
 - a) Sind im Parallelogramme alle vier Seiten gleich und alle Winkel rechte, so heißt es ein *Quadrat*. (Fig. 46.)
 - b) Hat ein Parallelogramm vier gleiche Seiten und schiefe Winkel, so heißt es eine *Raute*, oder *Rhombus*. (Fig. 47.)
 - c) Sind im Parallelogramme nur die gegenüberstehenden Seiten gleich, und alle Winkel rechte, so heißt es ein *Rechteck*. (Fig. 48.)
 - d) Ein Parallelogramm, worinn die gegenüberstehenden Seiten gleich, und die Winkel schief sind, heißt ein *Rhomboid*. (Fig. 49.) *)
- 2) ein *Trapez*, wenn darin nur zwey gegenüberstehende Seiten parallel sind. (Fig. 50.)
- 3) ein *Trapezoid*, wenn keine Seite zur andern parallel ist. (Fig. 51.)

*) Man benennt ein Parallelogramm dadurch, daß man zwey, an entgegengesetzten Winkeln stehende, Buchstaben nennt. So bezeichnet man z. B. das Parallelogr. Fig. 47. durch AD .

Zusatz. Quadrate sind congruent, wenn sie eine Seite, Rechtecke aber, wenn sie zwey zusammenstossende Seiten gleich haben; denn dann müssen sie, aufeinander gelegt, sich decken. Gleich große Quadrate haben gleiche Seiten.

§. 42.

Lehrsatz. In jedem Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten und Winkel gleich.

Beweis. (Fig. 52.)

Th. 1) $AB = CD$ 2) $AC = BD$ 3) $A = D$ 4) $B = C$.

Dat. $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$ [§. 41. 1.]. Man ziehe die Diagonale CB , so ist

$$\left. \begin{array}{l} o = y \\ n = x \end{array} \right\} [\S. 34. I.]$$

$$CB = CB.$$

Daher $\triangle ABC \cong \triangle BCD$ [§. 31.], und

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ AC = BD \\ A = D. \end{array} \right\} [\S. 18. Zus. II.]$$

Da $o = y$, und

$n = x$ ist, so ist auch

$$o + n = y + x, \text{ oder } ABD = ACD.$$

I. Zusatz. Parallelen zwischen Parallelen sind gleich.

II Zusatz. Die Diagonale theilt jedes Parallelogramm in zwey congruente Dreyecke, und

III. Zusatz. jedes Dreyeck ist die Hälfte eines Parallelogramms, das mit ihm gleiche Höhe und Grundlinie hat; denn es ist $\triangle ABC \cong \triangle BCD = \frac{1}{2} AD$. Beyde Dreyecke haben gleiche Grundlinien AB und CD , und gleiche Höhen, indem sie zwischen zwey Parallelen liegen. [§. 28. Zus. III. und §. 32.]

IV. Zusatz. Wenn in einem Parallelogramme ein Winkel ein rechter ist, so sind es auch die übrigen. Denn in Fig. 48. ist, wenn $A = R$, auch $D = R$ [Lehrs.]. Es ist aber auch $AB \parallel CD$ mithin $A + C = 2 R$. [§. 34. III], und, da $A = R$ ist, so muß auch $C = R$, mithin $B = C = R$ [Lehrs.] seyn.

§. 43.

Lehrsatz. Wenn in einem Vierecke die gegenüber-

stehenden Seiten gleich sind, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. (Fig. 52.) Th. 1) $AB \parallel CD$, 2) $AC \parallel BD$.

Daten. $AB = CD$

$AC = BD$. Es ist auch, wenn man die Diagonale zieht $CB = CB$.

Daher $\triangle ABC \cong \triangle BCD$ [§. 20.], mithin nach §. 18. Zus. II.

1) $\alpha = \gamma$ und daher $AB \parallel CD$ } [§. 35. I.]

2) $x = n$ „ „ „ $AC \parallel BD$ }

Zusatz. Sind in einem Vierecke bloß zwey gegenüberstehende Seiten gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm. Denn (Fig. 52.) wenn $AB =$ und $\parallel CD$ ist, so ist auch $\alpha = \gamma$ [§. 34. I.]

$AB = CD$

$CB = CB$.

Also $\triangle ABC \cong \triangle BCD$ [§. 18.], und daher $x = n$.

Mithin $AC \parallel BD$ [§. 35. I.].

§. 44.

Lehrsatz. Wenn in einem Vierecke die gegenüberstehenden Winkel gleich sind, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. (Fig. 52.) Th. 1) $AB \parallel CD$. 2) $AC \parallel BD$.

Daten. $A = D$

$C = B$

} also $A + C = D + B$.

Es ist $A + C + D + B = 4 R$. [§. 39. Zus. I.]

oder $2(A + C) = 4 R$ und

$A + C = 2 R$. Mithin

$AB \parallel CD$ [§. 35. III.].

Es ist auch $B + D = A + C$ also $= 2 R$. Da aber

$A = D$ ist, so muß

auch $B + A = 2 R$, und daher

$AC \parallel BD$ [§. 35. III.] seyn.

§. 45.

Aufgabe. (Fig. 47.) Aus zwey Seiten AC und CD , und dem eingeschlossenen Winkel C , ein Parallelogramm zu zeichnen.

Auflösung. Man zeichne an CD den Winkel C [§. 21. 1.], und trage auf den andern Schenkel dieses Winkels AC auf. Aus D beschreibe man mit AC , und aus A mit CD Kreisbögen, und ziehe nach den Durchschnittspunct B die Linien AB und DB , so ist AD das verlangte Parallelogramm.

Beweis. Da zwey Seiten gegeben sind, so sind dadurch auch die übrigen zwey bestimmt [§. 42.], und, weil nach der Construction $AB = CD$, dann $AC = BD$ ist, so muß nach §. 43. AD ein Parallelogramm seyn.

§. 46.

Lehrsatz. Zwey Parallelogramme, die einerley Grundlinie und gleiche Höhen haben (oder zwischen zwey Parallelen liegen), sind gleich.

Beweis. Hier ergeben sich 3 Fälle.

- I. EF fällt zum Theile auf AB (Fig. 53.),
- II. es stößt an AB (Fig. 54.), oder
- III. es fällt ausserhalb AB (Fig. 55.).

ad I. *Thes.* $AD = CF$. (Fig. 53.),

Dat. $CD = CD$, $AF \parallel CD$.

Es ist $AB = CD = EF$. [§. 42.]

$$- EB = - EB.$$

Also $AB - EB = EF - EB$, oder

$$AE = BF. \text{ Auch ist}$$

$$AC = BD$$

$$EC = FD. \} \text{ [§. 42.]}$$

Folgl. $\triangle ACE \cong \triangle BDF$. [§. 20.]

Trap. $ED = \text{Trap. } ED$. Mithin

$$\triangle ACE + \text{Tr. } ED = \triangle BDF + \text{Trap. } ED, \text{ oder}$$

$$AD = CF.$$

ad II. *Th.* $AD = CF$. [Fig. 54.]

Dat. $CD = CD \parallel AF$.

$$\text{Es ist } \triangle ABC \cong \triangle BCD \} \text{ [§. 42. Zus. II.]}$$

$$\triangle BCD \cong \triangle BDF.$$

$$\text{Also } \triangle ABC + \triangle BCD = \triangle BCD + \triangle BDF, \text{ oder}$$

$$AD = CF.$$

ad III. *Thes.* $AD = CF$. [Fig. 55.]

Dat. $CD = CD \# AF$.

Es ist $AB = CD = EF$ [§. 42.]

$$BE = BE.$$

Folgl. $AB + BE = EF + BE$, oder

$$AE = BF. \text{ Es ist auch}$$

$$AC = BD \}$$

$$CE = DF. \} [\S. 42.]$$

Mithin $\triangle ACE \cong \triangle BDF$ [§. 20.]

$$- \triangle BGE = - \triangle BGE$$

$$+ \triangle GCD = + \triangle GCD.$$

Also $\triangle ACE - \triangle BGE + \triangle GCD = \triangle BDF - \triangle BGE + \triangle GCD$, oder $AD = CF$.

I. Zusatz. Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich (Fig. 56.), d. i. $AD = EH$, wenn $CD = GH$ und $AF \# CH$ ist, denn, zieht man EC und FD , so ist

$$AD = CF \}$$

$$\text{und } CF = EH. \} [\text{Lehrs.}]$$

$$\text{Folgl. } AD = EH.$$

II. Zusatz. Dreyecke, von einerley oder gleichen Grundlinien und gleichen Höhen, sind gleich; denn sie sind nach §. 42. *Zus. III.* Hälften von Parallelogrammen, die mit ihren einerley oder gleiche Grundlinien und Höhen haben, und was für die Ganzen gilt, gilt auch für die Hälften.

III. Zusatz. Mehrere Dreyecke von gleichen Höhen sind zusammen einem Dreyecke gleich, welches dieselbe Höhe, und die Summe aller Grundlinien jener Dreyecke zur Basis hat; d. i. (Fig. 57.)

$\triangle ABC + \triangle CDE + \triangle EFG = \triangle ABG$, wenn $AF \# BG$, und $BG = BC + CE + EG$ ist. Denn

$$\triangle ABC = \triangle ABC$$

$$\triangle CDE = \triangle ACE \}$$

$$\triangle EFG = \triangle AEG. \} [\text{Zus. II.}]$$

Also $\triangle ABC + \triangle CDE + \triangle EFG = \triangle ABC + \triangle ACE + \triangle AEG = \triangle ABG$.

IV Zusatz. (Fig. 58.) Ein Dreyeck ABC ist so groß als ein Parallelogramm AE oder DF , das mit ihm dieselbe Höhe, aber nur die halbe Grundlinie

hat; denn, da $CF \parallel AB$ und $BF \parallel AC$ ist, so ist

$$\triangle ABC \cong \frac{1}{2} AF \text{ [§. 42. Zus III.]}$$

Nun ist $AE = DF = \frac{1}{2} AF$ [Zus. I.].

Mithin $\triangle ABC = AE = DF$.

§. 47.

Aufgaben. 1) Ein Parallelogramm in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung. Man theile eine Seite in die gegebene Anzahl gleicher Theile, und ziehe durch die Theilungspuncte Parallelen zu einer, an die getheilte Seite anliegende, Seite des Parallelogramms. Dann müssen die dadurch entstandenen kleinern Parallelogramme gleich seyn [§. 46. Zus. I.].

2) Ein Dreyeck in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung. Man theile eine Seite des Dreyeckes in die gegebene Anzahl gleicher Theile, und ziehe von der gegenüberstehenden Spitze nach allen Theilungspuncten gerade Linien, so sind die kleinern Dreyecke einander gleich [§. 46. Z. II.].

§. 48.

Lehrsatz. Wenn man durch einen Punct der Diagonale eines Parallelogrammes, zu zwey aneinanderliegenden Seiten desselben, zwey Parallelen zieht, so erhält man vier Parallelogramme, wovon jene, durch welche die Diagonale nicht geht, gleich sind. (Man nennt letztere Ergänzungen an der Diagonale).

Beweis. (Fig. 59.) *Thes.* $AI = ID$.

Daten. $AB \parallel GH \parallel CD$; $AC \parallel EF \parallel BD$.

Es ist $\triangle ABC \cong \triangle BCD$

$\triangle EIB \cong \triangle HIB$

$\triangle IGC \cong \triangle ICF$.

[§. 9. Z. IV.]

Daher

$$\triangle ABC - \triangle EIB - \triangle IGC = \triangle BCD - \triangle HIB - \triangle ICF,$$

oder $AI = ID$.

§. 27.

Erklärungen. Eine Figur *verwandeln* heißt, aus ihr eine andere Figur machen, die der erstern gleich ist, ohne mit ihr congruent zu seyn.

Aufgaben. 1) (Fig. 55.) Ein Parallelogramm AD

in ein anderes verwandeln, das einen gegebenen Winkel MNO hat.

Auflösung. Man construire an die Grundlinie CD den gegebenen Winkel $ECD = MNO$ [§. 21. 1.]. Durch D ziehe man $DF \parallel CE$, und verlängere AB bis sie CE und DF schneidet, dann ist CF das verlangte Parallelogramm [§. 46.].

2) (Fig. 60.) Ein Dreyeck ACD in ein anderes mit einem gegebenen Winkel a zu verwandeln.

Auflösung. Man ziehe durch A eine parallele zur Grund-Linie CD , mache $BCD = a$ [§. 21. 1.], und ziehe BD , so ist das $\triangle BCD$ das verlangte Dreyeck [§. 46. Z. II.].

✱ 3) (Fig. 59.) Ein Parallelogramm DI in ein anderes verwandeln, das eine gegebene Seite mn hat.

Auflösung. Man verlängere DF so, daß $CF = mn$ wird, ziehe CI , welche, verlängert, die Verlängerung von DH in B schneidet. Durch C ziehe man zu BD , und durch B zu CD Parallelen, die sich in A schneiden. Verlängert man endlich IH und FI , so ist AI das verlangte Parallelogramm mit der gegebenen Seite $GI = CF = mn$ [§. 48.].

4) Ein Dreyeck in ein Parallelogramm mit einer gegebenen Seite zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandle nach §. 46. Zus. IV. das Dreyeck in ein Parallelogramm, und dieses nach der 3ten Aufgabe in ein anderes mit der gegebenen Seite.

5) Ein Parallelogramm in ein Dreyeck zu verwandeln, das eine gegebene Seite hat.

Auflösung. Man verwandle nach der 3ten Aufgabe das gegebene Parallelogramm in ein anderes, das die Hälfte der gegebenen Seite des Dreyeckes zur Grund-Linie hat; dann verdopple man diese, und ergänze das Dreyeck [§. 46. Z. IV.].

I. Zusatz. Man kann jedes Parallelogramm und jedes Dreyeck in ein Rechteck verwandeln. [1. Aufg. und §. 46. Zusatz. IV.].

II. Zusatz. Jede geradlinige Figur läßt sich in ein Dreyeck verwandeln. Man schneide nämlich in der gegebenen Figur durch eine Diagonale ein Dreyeck ab;

durch die Spitze desselben ziehe man mit der Diagonale eine Parallele, verlängere eine, an die Diagonale anstossende, aber nicht zu obigem Dreyecke gehörige, Seite der Figur, bis sie die Parallele trifft, und ziehe von diesem Punkte eine gerade Linie bis zu dem andern Endpunkte der Diagonale. Dadurch erhält man ein neues Dreyeck, das dem abgeschnittenen gleich ist [§. 46. Zus. II.]. Setzt man dieses neue Dreyeck an die Stelle des alten, so bleibt die Gröfse der Figur ungeändert; diese hat aber um eine Ecke weniger. Dieses Verfahren, lange genug wiederholt, gibt am Ende ein Dreyeck, das der gegebenen Figur gleich ist.

§. 50.

✓ *Lehrsatz.* In jedem rechtwinkligen Dreyecke ist das Quadrat der Hypotenuse der Summe der Quadrate der beyden Katheten gleich.

Beweis. (Fig. 61.) *Thes.* $AB^q + BC^q = AC^q$.

Daten. $ABC = R$. Man construire aus jeder Seite des Dreyeckes ein Quadrat, fälle aus B auf die Hypotenuse AC die Senkrechte LB , und verlängere sie bis K ; dann ist $BK \parallel AH$ [§. 35. III.], und es sind AK und KC Parallelogramme [§. 41. 1.].

Nun hat man zu zeigen, dafs

$$1) AB^q = AK \text{ und}$$

$$2) BC^q = KC \text{ ist.}$$

ad 1) Man ziehe BH und CD , dann HL und BD , so ist: $x = y = R$. [§. 41. a.]

$$0 = 0,$$

folgl. $x + 0 = y + 0$, oder

$$DAC = BAH. \text{ Auch}$$

$$\text{ist } AC = AH \}$$

$$AD = AB \} [\text{§. 41. a.}].$$

Mith. $\triangle DAC \cong \triangle ABH$ [§. 18.].

Es ist aber $\triangle DAC = \triangle DAB = \frac{1}{2} AB^q$ [§. 46. Zus. II. und $\triangle ABH = \triangle AHL = \frac{1}{2} AK$] u. §. 42. Z. III].

Daher auch $\frac{1}{2} AB^q = \frac{1}{2} AK$ und $AB^q = AK$.

ad 2) Man ziehe BI und AG , dann LI und BG ; so läfst sich auf dieselbe Art, wie bey nro. 1., zeigen, dafs $BC^q = KC$ ist.

Da nun $AB^q = AK$ und
 $BC^q = KC$ ist, so muß

$$AB^q + BC^q = AK + KC = AC^q \text{ seyn. *)}$$

I. Zusatz. Aus der Gleichung $AB^q + BC^q = AC^q$ ist auch $AB^q = AC^q - BC^q$, d. h. das Quadrat aus einer Kathete ist dem Unterschiede zwischen dem Quadrate der Hypotenuse und dem der andern Kathete gleich.

II. Zusatz. Wenn in einem Dreyecke ABC (Fig. 62.) $BC^q = AB^q + AC^q$ ist, so muß es rechtwinklig, d. i. $BAC = R$, seyn. Denn errichtet man in A auf AC die Senkrechte $AD = AB$, so ist, da $CAD = R$ ist, wenn man CD zieht,

$$CD^q = AD^q + AC^q \\ = AB^q + AC^q = BC^q, \text{ und daher}$$

auch $CD = BC$ [§. 41. Zus.]. Es ist auch
 $AC = AC$

$$AD = AB \text{ [Construction].}$$

Mithin $\triangle ACD \cong \triangle ABC$ [§. 20.], und also
 $BAC = DAC = R$.

§. 51.

Aufgaben. 1) (Fig. 63.) Zwey, oder mehrere, Quadrate in eines verwandeln, das so groß ist als jene zusammen genommen.

Auflösung und Beweis. Man construire einen rechten Winkel MNO , mache $NP = a$, $NQ = b$, und ziehe PQ , so ist

$$PQ^q = NP^q + NQ^q \text{ [§. 50.]}$$

$$= a^q + b^q.$$

Macht man $NR = PQ$ und $NS = c$, so ist, wenn man RS zieht, $RS^q = NR^q + NS^q$

$$\text{oder } RS^q = PQ^q + c^q = a^q + b^q + c^q.$$

2) Die Seite eines Quadrates zu finden, das doppelt so groß ist, als ein gegebenes.

*) Dieser Satz heißt, von seinem Erfinder Pythagoras, der Pythagorische Lehrsatz, und ist eine reiche Quelle, woraus die wichtigsten Wahrheiten für die Geometrie fließen.

Auflösung und Beweis. (Fig. 64.) Man nehme die Diagonale des gegebenen Quadrates; denn es ist

$$AB^q = AC^q + CB^q \text{ [§. 50.], oder} \\ = a^q + a^q = 2 a^q.$$

* 3) Die Seite eines Quadrates finden, welches der Differenz zweyer gegebenen Quadrate gleich ist.

Auflösung und Beweis. (Fig. 65.) Man construiere einen rechten Winkel MNO , und mache $NP = b$, beschreibe dann aus P mit a einen Kreisbogen der MN in Q schneidet, so ist, wenn man QP zieht,

$$NQ^q = QP^q - NP^q \text{ [§. 50. Zus. I]} \\ = a^q - b^q.$$

4) Die Seite eines Quadrates zu finden, das der Hälfte eines gegebenen gleich ist.

Auflösung und Beweis. (Fig. 66.) AD sey das gegebene Quadrat, und jede Seite davon a . Man halbire BC , und nehme die halbe Diagonale EC , so ist diese die verlangte Seite; denn es ist, wenn man ED zieht,

$$\left. \begin{aligned} n &= R. \\ x &= \frac{1}{2} CDB = \frac{1}{2} R. \end{aligned} \right\} \text{ [§. 23. Zus. I.]}$$

Es muß also auch $o = \frac{1}{2} R$. [§. 38. Zus. III.] und daher

$CE = ED$ [§. 19.] seyn. Und da auch

$$CD^q = CE^q + ED^q \text{ [§. 50.]}$$

$$= CE^q + CE^q = 2 CE^q \text{ ist, so}$$

$$\text{muß } \frac{1}{2} CD^q = CE^q \text{ seyn.}$$

V. A b s c h n i t t.

Von der Lage und Grösse der geraden Linien in Bezug auf den Kreis.

§. 52.

Lehrsatz. (Fig. 67.) Jede gerade Linie CD , die auf dem Endpuncte A des Radius AB senkrecht steht, ist eine Tangente [§. 13. a.].

Beweis. Man nehme in CD den beliebigen Punct E , und ziehe BE , so ist $BE > AB$ [§. 28. Zus. II. da $BAE = R$ ist], mithin liegt E ausserhalb des Kreises, d. h. jeder Punct von CD , A ausgenommen, liegt

ausserhalb des Kreises. Es ist daher CD eine Tangente [§. 13. 4.].

Zusatz. Der Radius AB , den man an den Berührungspunct A der Tangente CD zieht, steht auf ihr senkrecht; denn wäre dieß nicht, so müßte eine andere gerade Linie z. B. BE von B auf CD senkrecht fallen, und dann wäre $BE < AB$ [§. 28. *Zus. III.*], gegen die Natur der Tangente, indem dann E in die Kreisfläche fallen müßte.

§. 53.

Erklärung. Man sagt ein Kreis ist 1) um eine Figur beschrieben, wenn sein Umkreis durch alle Winkelspitzen der Figur geht; 2) in einer Figur beschrieben, wenn er alle Seiten derselben berührt.

§. 54.

Aufgabe. Durch drey gegebene Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. (Fig. 68.). Man verbinde die drey gegebenen Puncte durch zwey gerade Linien, welche als Sehnen erscheinen, wenn der Kreis durch obige drey Puncte geht. Man errichte daher in der Mitte der beyden Linien AB und AC senkrechte; wo diese sich schneiden (F), ist der Mittelpunkt des verlangten Kreises.

Beweis. Der Mittelpunkt liegt in beyden Perpendikeln, gemäß §. 24. *Zus. I.*, und weil diese nur einen Punct F gemein haben [§. 5. *Zus. II.*], so ist dieser der Mittelpunkt. Man braucht nur noch zu zeigen, daß DF und EF sich schneiden müssen. Man ziehe DE . Da $ADF = R = AEF$ ist, so muß

$$EDF < R, \text{ und auch}$$

$$DEF < R,$$

mith. $EDF + DEF < 2R$ seyn, folglich müssen sich DF und EF schneiden [§. 35. *Zus. III.*].

Zusatz. Wie obige Aufgabe löst man auch folgende:

- 1) Den Mittelpunkt eines Kreises zu suchen.
 - 2) Um ein Dreyeck einen Kreis zu beschreiben
- [§. 53.].

§. 55.

Aufgabe. In einem Dreyecke einen Kreis zu beschreiben. [§. 53.]

Auflösung. (Fig. 69). Man halbire zwey Winkel des Dreyeckes. In D , wo sich die Halbirungs-Linien schneiden, ist der Mittelpunkt, und die senkrechte DE von D auf eine Seite des Dreyeckes, der Radius des verlangten Kreises.

Beweis. Da $B + C < 2R$ [§. 27.] ist, so muß auch $\frac{1}{2}(B + C) < 2R$ d. i. $m + n < 2R$ seyn; folglich schneiden sich die Halbirungslinien [§. 35. Zus. III.]. Man fälle von D auch auf AB und AC Senkrechte, so ist:

$$o = n \text{ [Constr.]}$$

$$BD = BD$$

$$x = y = R.$$

Folgl. $\triangle BFD \cong \triangle BDE$. [§. 31.]

Daher $FD = DE$ [§. 18. Zus. II.].

Auch ist $m = z$ [Constr.]

$$DC = DC$$

$$u = v = R.$$

Also $\triangle DGC \cong \triangle DCE$ [§. 31.],

und $DG = DE$ [§. 18. Zus. II.].

Daher sind $FD = DE = DG$ Radien des Kreises, auf welchen die Seiten des Dreyeckes senkrecht stehen, folglich Tangenten sind. [§. 52.].

* §. 56.

Erklärungen. (Fig. 70.). Der Winkel, der seinen Scheitel im Mittelpuncte eines Kreises hat, heißt *Centralwinkel*, z. B. DEF ; hat er aber den Scheitel in der Peripherie, so heißt er *Peripherie-Winkel* z. B. ABC . Man sagt, sie ruhen auf den Bogen, die zwischen ihren Schenkeln liegen. So ruht z. B. DEF auf DF und ABC auf AC .

§. 57.

Lehrsatz. In Kreisen von gleichen Radien gehören zu gleichen Centralwinkeln gleiche Sehnen, Bogen, Aus- und Abschnitte.

Beweis. (Fig. 71.). *Thes.* 1) $AB = ab$.

2) Bog. $AB = \text{Bog. } ab$. 3) Sector $ACB = \text{Sect. } acb$.

4) Segm. $ADB = \text{Segm. } adb$.

Daten. Es ist $ACB = acb$.

$$AC = ac$$

$$CB = cb.$$

Mithin $\triangle ACB \cong \triangle acb$ [§. 18.], und

$$AB = ab$$
 [§. 18. *Zus. II.*].

Man lege C auf c , und CA längst ca , so muß, da $\triangle ACB \cong \triangle acb$ ist, CB auf cb , und A auf a , so wie B auf b , ferner jeder Punct D vom Bogen ADB auf einen Punct d des Bogens adb fallen, folglich decken sich auch die Bogen, Abschnitte und Ausschnitte, und sind also congruent.

I. Zusatz. In einem Kreise gehören zu gleichen Centralwinkeln gleiche Sehnen, Bogen, Aus- und Abschnitte.

II. Zusatz. In einem Kreise, oder in mehrern Kreisen mit gleichen Radien gehören zu gleichen Sehnen gleiche Centralwinkel und Bogen, gleiche Aus- und Abschnitte. Denn, wenn $AB = FG = ab$ ist, so muß $\triangle ABC \cong \triangle CFG \cong \triangle abc$ [§. 20.], mithin $ACB = GCF = acb$ seyn, woraus dann gemäß des Lehrsatzes und des *I. Zusatzes* das Uebrige folgt. Auch ergiebt sich, daß die Senkrechten IC , CH und ch gleich sind, d. h. daß gleiche Sehnen gleichweit vom Mittelpuncte abstehen und umgekehrt; denn es ist

$$GI = AH = ah$$
 [§. 30. *Zus. IV.*]

$$GIC = AHC = ahc = R.$$

$$\text{und } GC = AC = ac.$$

Daher $\triangle IGC \cong \triangle AHC \cong \triangle ahc$, [§. 30. *Zus. II.*],

$$\text{also } IC = CH = ch.$$

III. Zusatz. Zu gleichen Bogen gehören in gleichen Kreisen gleiche Sehnen, und umgekehrt; denn zu gleichen Bogen gehören gleiche Centralwinkel, und gleiche Centralwinkel haben gleiche Sehnen [Lehrs.]. Eben so gehören zu gleichen Sehnen gleiche Centralwinkel [§. 20 u. §. 18. *Zus. II.*], und zu diesen gleiche Bogen [Lehrs.].

IV. Zusatz. Eine gerade Linie CH , die den Centralwinkel halbirt, halbirt auch die Sehne, den Bogen, den Aus- und Abschnitt; denn daß $AH = HB$

ist, folgt aus §. 23. IV. Zus.; und weil $o = n$ ist, liegt das Uebrige im I. Zus.

V. Zusatz. Zwey senkrecht sich schneidende Durchmesser theilen die Peripherie und den Kreis in vier congruente Theile; man nennt sie *Quadranten*.

VI. Zusatz. Um einen Bogen ADB zu halbiren, halhire man den, zum Bogen gehörigen, Centralwinkel durch CD , [§. 21.2.], dann ist auch Bog. $AD =$ Bog. BD , indem $o = x$ [Zus. I.] ist.

§. 58.

Lehrsatz. Der Centralwinkel ist doppelt so groß als der Peripherie - Winkel, der mit ihm auf demselben Bogen ruht.

Beweis. Es ergeben sich hier drey Fälle. Es fällt nämlich der Mittelpunkt entweder

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1) in einen Schenkel, oder | } des Peripherie-
Winkels. |
| 2) zwischen beyde Schenkel, | |
| 5) oder ausser beyde Schenkel | |

ad 1) (Fig. 72.) *Thes.* $o = 2x$.

Daten. $BC = BD$, folgl. $x = y$ [§. 18. Zus. IV.].

Es ist aber $o = x + y$ [§. 37.], mithin
auch $o = 2x$.

ad 2) (Fig. 73.) *Thesis.* $ADC = 2ABC$.

Daten. Man ziehe den Diameter BE , so ist

$$y = 2p \quad [1.]$$

$$z = 2x \quad [1.].$$

Also $y + z = 2p + 2x = 2[p + x]$, oder
 $ADC = 2ABC$.

ad 3) (Fig. 74.) *Thes.* $o = 2x$.

Daten. Man ziehe den Diameter BE , so ist

$$EDC = 2EBC \quad [1.]$$

$$m = 2n \quad [1.].$$

Mithin $EDC - m = 2EBC - 2n = 2[EBC - n]$,
oder $o = 2x$.

I. Zusatz. (Fig. 75.) Alle Peripherie - Winkel x , die auf demselben Bogen CD ruhen, sind gleich; denn jeder gleicht dem halben Centralwinkel o [Lehrs.].

II. Zusatz. Peripherie - Winkel, die in gleich grossen Kreisen auf gleich grossen Bogen ruhen, sind

gleich, denn sie sind Hälften zweyer gleichen Centralwinkel.

III. Zusatz. (Fig. 75.) Jeder Peripherie - Winkel m , der auf dem Halbkreise oder Diameter ruht, ist ein rechter; denn $m = \frac{1}{2} AKB$ [Lehrs.]

$$= \frac{1}{2} [2 R.] [\S. 9. Zus. III.]$$

$$= R.$$

Diesem gemäß kann man am Ende der Linie AE , ohne sie über E zu verlängern eine senkrechte EB errichten. Um z. B. (Fig. 45.) in A auf AB eine Senkrechte zu errichten, wähle man oberhalb AB in der Nähe von A den Punct C , beschreibe mit AC aus C einen Kreis, der AB in E schneidet. Zieht man nun EC und verlängert sie bis an den Kreisbogen nach D , so ist die von A nach D gezogene gerade Linie die verlangte senkrechte; denn es ist, diesem Zusatze gemäß $DAE = R$.

IV. Zusatz. (Fig. 76.) Die Summe der 2ⁿ gegenüberstehenden Winkel eines jeden Viereckes im Kreise ist $= 2 R$. Denn $A = \frac{1}{2}$ hohl BED ,

$$C = \frac{1}{2} \text{erhaben } BED. [\text{Lehrs.}]$$

$$\text{Mithin } A + C = \frac{1}{2} [\text{hohl } BED + \text{erh. } BED]$$

$$= \frac{1}{2} [4 R.]. [\S. 9. Zus. VI.]$$

$$= 2 R.$$

Eben so läßt sich zeigen, daß $B + D = 2 R$ ist.

§. 59.

Lehrsatz. Jeder Winkel, den an der Peripherie eine Sehne mit einer Tangente bildet, ist einem Peripherie - Winkel gleich, der auf dem Bogen ruht, den die Sehne zwischen sich und der Tangente abschneidet.

Beweis. (Fig. 77.) Man ziehe den Diameter BE und auch EC , so ist

$$\text{Thes. } x = y.$$

$$\text{Daten. Denn es ist } x + o = R. [\S. 52. Zus.]$$

$$o + y = R. [\S. 38. Z. III.]$$

$$\text{Also } x + o = o + y \text{ und}$$

$$x = y.$$

Zusatz. Dasselbe gilt auch für den stumpfen Winkel

$$FBC = m.$$

Denn $FBC \div x = 2 R$ [§. 9. Zus. IV.]

$y \div m = 2 R$. [§. 58. Zus. IV.]

Mithin $FBC \div x = y \div m$ und
da $x = y$ [Lehrs.], so ist auch

$$FBC = m.$$

§. 60.

Lehrsatz. Wenn zwey Secanten [§. 13. a.] ausserhalb des Kreises sich schneiden, so ist der Winkel, den sie bilden, dem Unterschiede zweyer Peripherie - Winkel gleich, die auf den beyden Bogen ruhen, welche die Secanten zwischen sich abschneiden.

Beweis. (Fig. 78.) Man ziehe DC , so ist

Thes. $x = o - n$.

Daten. Denn es ist $x \div n = o$ [§. 37.], woraus
 $x = o - n$ ist.

Zusatz. Schneiden sich zwey Sehnen im Kreise, so ist der dadurch entstehende Winkel m gleich der Summe zweyer Peripherie - Winkel, die auf den Bogen ruhen, welche die Schenkel des Winkels, rückwärts und vorwärts verlängert, zwischen sich abschneiden, d. i., wenn man DC zieht, $m = o \div y$ [§. 37.].

§. 61.

Aufgabe. Eine Tangente zu ziehen

a) durch einen gegebenen Punct in der Peripherie A (Fig. 79.).

Auflösung. Man ziehe den Radius AB , und errichte in A auf AB die Senkrechte AC [§. 40. od. §. 58. Zus. III.], welche die Tangente ist [§. 52.].

b) durch einen gegebenen Punct C ausserhalb des Kreises. (Fig. 79.)

Auflösung. Man ziehe BC , halbire sie in D , und beschreibe einen Kreis mit DB . Zieht man nun AC oder EC , so sind diese Tangenten; denn $BAC = R = BEC$ [§. 58. Zus. III. und §. 52.]. Es giebt also in diesem Falle 2 Tangenten.

§. 62.

Lehrsatz. Wenn die Peripherie eines Kreises in n gleiche Theile getheilt ist, und man durch alle

Theilungspuncte der Ordnung nach Sehnen zieht, so erhält man ein, im Kreise beschriebenes reguläres n Eck. [§. 53. 1.]

Beweis. (Fig. 80.) Da alle Bogen gleich sind, so sind es auch die Sehnen [§. 57. *Zus. III.*], oder die Seiten der Figur. Alle Polygons-Winkel stehen auf $n-2$ solchen gleichen Bogen, sind also gleich [§. 58. *Zus. II.*], und die Figur ist regulär [§. 12. b.].

Zusatz. Um in einem Kreise ein reguläres Viereck zu beschreiben, errichte man (Fig. 81.) zwey Diameter aufeinander senkrecht, und ziehe die Sehnen AC , CB , BD und DA . [§. 57. *Zus. V.*] Halbirt man jeden Centralwinkel dieses regulären Viereckes $ACBD$ und zieht man die Sehnen zu den halben Bogen, so erhält man ein reguläres Achteck, und, setzt man dieses Verfahren fort, ein reguläres Sechzehneck, Zweyunddreysigeck etc.

§. 63.

Lehrsatz. Wenn man in einem regulären Polygone zwey Winkel an einer Seite halbirt, so ist der Durchschnittspunct der Halbirungslinien

- | | |
|---------------------|-------------|
| 1) von allen Ecken | } der Figur |
| 2) von allen Seiten | |

gleichweit entfernt, und er heisst der *Polygons-Mittelpunct*.

Beweis. (Fig. 80.) Da sowohl A als $B < 2R$ ist, so ist auch $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B < 2R$; mithin müssen AG und BG sich schneiden [§. 35. *Zus. III.*], Es ist $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}B$ [verm. Voraussetzung.] oder $0 = n$, folglich auch $BG = AG$ [§. 19.]. Zieht man GC , GD , GE und GF ,

so ist $AB = BC$

$BG = BG$

$n = x = \frac{1}{2}B.$

Also $\triangle ABG \cong \triangle BCG$ [§. 18.]

und $AG = CG = BG.$

Auf ähnliche Art läßt sich zeigen, daß auch GD , GE und GF der Linie AG gleich sind. Es steht also G von allen Ecken der Figur gleichweit ab. Daß G auch von den Seiten (Sehnen) gleichweit abstehe ergibt sich aus dem Ende des *II. Zusatzes* §. 57.

I. Zusatz. Wenn man in einem regulären Polygone vom Polygons-Mittelpuncte an alle Ecken der Figur gerade Linien zieht, so wird dadurch das Polygon in so viele congruente Dreyecke getheilt, als es Seiten hat, und jeder Polygons-Winkel wird halbirt. Auch erhält man um den Polygons-Mittelpunct so viele gleiche Winkel, als die Figur Seiten hat, welche *Centralwinkel des Polygons* heißen. Jeder davon ist $= \frac{4R}{n}$, wenn n die Zahl der Seiten ausdrückt.

II. Zusatz. Jedes reguläre Polygon ist einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinie der Perimeter des Polygons und dessen Höhe die Senkrechte vom Polygons-Mittelpuncte auf eine Seite des Polygons ist, d. h. (Fig. 80.) $\triangle BGK = ABCDEF$, wenn $BK = 6 BC$ ist [§. 46. Zus. III.]. Denn es ist

$$\triangle BGK = 6 \triangle BGC = ABCDEF.$$

§. 64.

Aufgabe. Um jedes reguläre Polygon und in jedem regulären Polygone einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. (Fig. 80!) Man halbire zwey Winkel an einer Seite z. B. A und B , so ist GB der Radius des Kreises um das reguläre Polygon, und die Senkrechte GH der Radius des Kreises im regulären Polygone.

Der Beweis beruht auf §. 63. und §. 53.

§. 65.

Lehrsatz. Die Seite eines regulären Sechseckes ist dem Radius des, darum beschriebenen, Kreises gleich.

Beweis. (Fig. 80?) *Thes.* $AG = AB$.

Dat. Im $\triangle ABG$ ist $AG = GB$, mithin $o = n$ [§. 18. Zus. IV.].

Es ist $AGB = \frac{4R}{6} = \frac{2}{3}R$ [§. 63. Zus. I.].

Mithin $o + n = 2R - AGB$ [§. 38.]

$$= 2R - \frac{2}{3}R$$

$$= \frac{4}{3}R, \text{ oder}$$

$$2n = \frac{4}{3}R; \text{ und}$$

$$n = \frac{2}{3}R = AGB, \text{ mithin auch}$$

$$AG = AB. \text{ [§. 19.]}$$

I. Zusatz. Will man ein reguläres Sechseck in einem Kreise construiren, so darf man bloß den Radius des Kreises sechs Mal auf der Peripherie auftragen, und die Sehnen ziehen.

II. Zusatz. Halbirt man jeden Centralwinkel des regulären Sechseckes, und zieht die, zu den halben Bogen gehörigen, Sehnen, so erhält man ein reguläres Zwölfeck; und, setzt man dieses Verfahren fort, so entsteht ein reguläres Vierundzwanzigeck, Achtundvierzigeck etc. [§. 62.]

III. Zusatz. Zieht man (Fig. 80.) im regulären Sechseck die Sehnen AC , AE und EC für die doppelten Bogen, so erhält man ein reguläres Dreyeck im Kreise d. i. $\triangle AEC$. [§. 62.]

§. 66.

Lehrsatz. Der Unterschied, zwischen dem halben Bogen und seiner Sehne, ist kleiner als der halbe Unterschied, zwischen dem ganzen Bogen und der dazu gehörigen Sehne.

Beweis. (Fig. 82.)

Thesis. Bogen $AC - AC < \frac{1}{2}$ [Bog. $AB - AB$].

Daten. Bogen $AC = \frac{1}{2}$ Bogen AB .

Man ziehe CB , so ist

$$AC = CB \quad [\S. 57. \text{Zus. III.}]$$

$$\text{und } AC + CB > AB \quad [\S. 15.],$$

$$\text{oder } 2 AC > AB \quad \text{und}$$

$AC > \frac{1}{2} AB$; dieß von dem Ausdrucke, Bogen $AC = \frac{1}{2}$ Bog. AB , subtrahirt, gibt

$$\text{Bogen } AC - AC < \frac{1}{2} \text{ Bog. } AB - \frac{1}{2} AB$$

$$< \frac{1}{2} [\text{Bog. } AB - AB].$$

I. Zusatz. Der Umfang eines regulären Polygons von $2n$ Seiten weicht weniger von der Peripherie des umschriebenen Kreises ab, als der eines regulären Polygons von n Seiten. Da man nun die Anzahl der Seiten eines regulären Vieleckes unendlich verdoppeln kann [§. 65. Zus. II.], so ergibt sich, daß der Kreis als ein reguläres Polygon von unendlich vielen Seiten zu betrachten ist.

II. Zusatz. Der Kreis ist einem Dreyecke gleich.

dessen Grundlinie seine Peripherie und dessen Höhe der Radius ist. [§. 63. Zus. II.]

III. Zusatz. Der Kreis - Sector [§. 13. c.] ist einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinie der Bogen, und dessen Höhe der Radius ist [II. Zus. und §. 46. Z. III].

VI. A b s c h n i t t.

Von den Verhältnissen der Linien, und von der Aehnlichkeit der Figuren.

§. 67.

Erklärung. Messen heisst angeben, wie oft eine bestimmte Grösse (Mafs) in einer andern gegebenen enthalten ist, oder bestimmen, in welchem Verhältnisse die zu messende Grösse zum Mafse steht.

Linien und Flächen stehen nur in so ferne in einem Verhältnisse, als sie gezählte Grössen sind, d. h. als ihre Quantitäten, durch ein gemeinschaftliches Mafs in Zahlen, bestimmt sind.

§. 68.

Lehrsatz. Dreyecke von gleichen Höhen verhalten sich zu einander wie ihre Grundlinien.

Beweis. (Fig. 83.)

Thes. $\triangle ABC : \triangle DEF = BC : EF$.

Daten. $AG = DH$. Man wähle eine Länge Bb , mit der sich sowohl BC als EF genau messen lässt [§. 67.], so wird sich finden, daß Bb auf BC , m , und auf EF , n Mahl aufgetragen werden kann, folglich

$$BC : EF = m. Bb : n. Bb = m : n$$

Es ist also durch das Auftragen von Bb die Linie BC in m und EF in n , unter sich gleiche, Theile getheilt. Zieht man nun von diesen Theilungspuncten nach den Spitzen der Dreyecke gerade Linien, so erhält man im $\triangle ABC$ m und im $\triangle DEF$ n kleinere Dreyecke, die, weil sie gleiche Grundlinien und Höhen haben, unter sich gleich sind.

Daher ist $\triangle ABC : \triangle DEF = m : n$. Es ist aber auch $BC : EF = m : n$, folglich

$$\triangle ABC : \triangle DEF = BC : EF.$$

Ist das Verhältniß $m : n$ nicht rational, so nehme man die Länge Bb so klein an, als nöthig ist, um sich dem rationalen Verhältnisse so viel möglich zu nähern. [Arithm.]

Zusatz. Parallelogramme von gleichen Höhen verhalten sich zu einander wie ihre Grundlinien. [§. 42. Zus. III.] Was für die Hälften gilt, gilt auch für die Ganzen.

§. 69.

Lehrsatz. Dreyecke von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

Beweis. (Fig. 84.)

Thes. $\triangle ABC : \triangle DEF = AG : DH$.

Daten. $BC = EF$. Man errichte in E auf EF eine Senkrechte, und mache $IE = DH$ und $KE = AG$, ziehe dann IF und KF , so ist: $\triangle KEF = \triangle ABC$ und $\triangle IEF = \triangle DEF$ [§. 46. Zus. II.]. Betrachtet man nun die Dreyecke KEF und IEF , und nimmt man IE und KE als ihre Grundlinien an, so haben sie gleiche Höhe EF , und es ist

$$\triangle KEF : \triangle IEF = KE : IE \quad [\S. 68.], \text{ oder } \triangle ABC : \triangle DEF = AG : DH.$$

Zusatz. Parallelogramme von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen. [§. 42. Zus. III.].

§. 70.

Lehrsatz. Alle Dreyecke verhalten sich zu einander wie die Producte aus ihren Grundlinien und Höhen.

Beweis. (Fig. 85.)

Thes. $\triangle ABC : \triangle DEF = BC . AG : EF . DH$.

Daten. Man errichte $IB = DH$ senkrecht auf BC , und ziehe IC , so ist

$$\triangle ABC : \triangle IBC = AG : IB \quad [\S. 69.]$$

$$\triangle IBC : \triangle DEF = BC : EF. \quad [\S. 68.]$$

Dah. $\triangle ABC . \triangle IBC : \triangle IBC . \triangle DEF = AG . BC : IB . EF$.

oder $\triangle ABC : \triangle DEF = BC . AG : EF . DH$.

Zusatz. Alle Parallelogramme verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundlinien und Höhen. [§. 42. *Zus. III.*].

§. 71.

Lehrsatz. Wenn man in einem Dreyecke zu einer Seite eine Parallellinie zieht, so stehen die abgeschnittenen Stücke der Seiten unter sich und mit den Ganzen in Proportion.

Beweis. (Fig. 86.)

Thes. 1) $AD : DB = AE : EC$.

2) $AB : AD = AC : AE$.

3) $AB : DB = AC : EC$.

Daten. $DE \parallel BC$.

ad 1) Man ziehe BE und DC , und betrachte AD und BD als Grundlinien der beyden Dreyecke ADE und DBE , so ist E ihre gemeinschaftliche Spitze, und sie haben gleiche Höhe. [§. 27. *Zus. II.*]

Daher $\triangle ADE : \triangle DBE = AD : DB$ [§. 68.]. Ebenso ist auch $\triangle ADE : \triangle DEC = AE : EC$ [§. 68.].

Mithin $AD : DB = AE : EC$, indem $\triangle DBE = \triangle DEC$ [§. 46. *Zus. II.*] ist.

ad 2. u. 3.) Aus 1. ergibt sich, daß

$AD + DB : AD$ [od. DB] $= AE + EC : AE$ [od. EC]

d. i. $AB : AD$ [od. DB] $= AC : AE$ [od. EC] *).

I. Zusatz. (Fig. 87.) Wenn in einem Dreyecke zu einer Seite mehrere Parallellinien gezogen sind, so stehen die abgeschnittenen Stücke der Seiten in Proportion. Denn, da $DE \parallel FG \parallel BC$ ist, so muß

$AF : AG = AD : AE = DF : EG$ [Lehrs. 2. u. 3.] seyn. Auch ist $AF : AG = FB : GC$ [Lehrs. 1.], mithin

$AD : AE = DF : EG = FB : GC$.

II. Zusatz. Wenn man zwey Seiten eines Dreyeckes in proportionelle Theile theilt, und die Thei-

*) In jeder dieser Proportionen kann man die mittlern und und äussern Glieder verwechseln, die Verhältnisse umkehren, und überhaupt alle Proportions - Gesetze der Arithmetik anwenden.

lungspunkte durch eine gerade Linie verbindet, so ist diese mit der ungetheilten Seite des Dreyeckes parallel; (Fig. 88.) d. i. wenn $AD:AB = AE:AC$ ist, so muß $DE \parallel BC$ seyn. Denn, wäre DE nicht $\parallel BC$, so ziehe man durch D eine Parallellinie zu BC z. B. DF ; dann wäre

$AD:AB = AF:AC$ [Lehrs.]. Es ist aber $AD:AB = AE:AC$ [Dat.]; folglich müßte

$AF = AE$ seyn, welches nicht möglich ist.

Es muß daher DF mit DE zusammen fallen, und $DE \parallel BC$ seyn.

III. Zusatz. Wenn man in einem Dreyecke zu einer Seite eine Parallellinie zieht, so verhalten sich die Parallelen zueinander, wie die anliegenden Seiten der Dreyecke, wozu sie gehören; d. i. (Fig. 88.) wenn $DE \parallel BC$ ist, so ist $DE:BC = AD:AB$.

$= AE:AC$; denn, zieht man $DG \parallel AC$, so ist $GC = DE$ [§. 42.], und $GC:BC = AD:AB$ [Lehrs. 3.], oder $DE:BC = AD:AB = AE:AC$. [Lehrs. 2.]

§. 72.

Lehrsatz. Wenn man in einem Dreyecke einen Winkel halbirt, und die Halbierungslinie bis an die gegenüberstehende Seite zieht, so stehen die Stücke dieser Seite mit den beyden andern in Proportion.

Beweis. (Fig. 89.) Thes. $AD:DC = AB:BC$.

Daten. $o = n$. Man verlängere AB so, daß $BE = BC$ wird, und ziehe CE , so ist:

$$\begin{aligned} m &= x \text{ [§. 18. Zus. IV.]} \text{ und} \\ o + n &= m + x \text{ [§. 37.], oder} \\ 2n &= 2m \text{ und} \end{aligned}$$

$n = m$, folglich

$$\begin{aligned} DB &\parallel CE \text{ [§. 35. I.]; mithin} \\ AD:DC &= AB:BE \text{ [§. 71. 1.]} \\ &= AB:BC. \end{aligned}$$

Zusatz. (Fig. 89.) Wenn man in einem Dreyecke eine Seite mit den zwey übrigen proportionirt theilt, so halbirt die gerade Linie, vom Theilungspunkte

an die gegenüberstehende Spitze gezogen, den Winkel des Dreyeckes, d. i. wenn

$AD:DC = AB:BC$ ist, so muß $o = n$ seyn; denn, verlängert man AB , so, daß $BE = BC$ wird, und zieht man CE , so ist, da $AD:DC = AB:BC$ ist, auch

$AD:DC = AB:BE$, folglich

$DB \parallel CE$ [§. 71. Zus. II.], also auch

$n = m$ [§. 34. I.], und

$2n = 2m$. Auch ist

$o + n = m + x = 2m$, mithin

$o + n = 2n = n + n$, und

$o = n$.

§. 73.

Lehrsatz. Eine gerade Linie, welche die nicht parallelen Seiten eines Trapezes halbt, ist der halben Summe der parallelen Seiten desselben gleich.

Beweis. (Fig. 90.) *Thes.* $EF = \frac{1}{2} [AB + CD]$.

Daten. $AB \parallel CD$, $AE = EC$ und $BF = FD$.

Verlängert man CA und DB , bis sie sich in K schneiden, so ist auch $EF \parallel CD \parallel AB$ [§. 71. Z. II.]. Man ziehe BC , dann EG und $HF \parallel CB$, so ist nach §. 71:

$AE:EC = AG:GB$, da aber $AE = EC$ ist, so ist auch $AG = GB = \frac{1}{2} AB$.

Ebenso ist $FD:BF = HD:CH$, da aber $BF = FD$ ist, so ist auch $HD = CH = \frac{1}{2} CD$.

Es ist aber $EI = GB$. [§. 42.]

$= \frac{1}{2} AB$, und

$IF = CH$ [§. 42.]

$= \frac{1}{2} CD$.

Dah. $EF = EI + IF = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CD$

$= \frac{1}{2} [AB + CD]$.

§. 74.

Aufgaben. 1) Eine gegebene gerade Linie AC [Fig. 87.] nach einem gegebenen Verhältnisse $a:b:c$ zu theilen.

Auflösung u. Beweis. Man ziehe AB beliebig, und mache $AD = a$, $DF = b$ und $FB = c$, ziehe von B nach C eine gerade Linie, dann FG und $DE \parallel BC$, so ist:

$$AE : EG : GC = AD : DF : FB \text{ [§. 71. Zus. I.]}$$

$$= a : b : c.$$

Zusatz. Werden auf AB lauter gleiche Theile aufgetragen, so werden auch die Theile der gegebenen Linie gleich groß.

2) Zu drey gegebenen geraden Linien a , b , c (Fig. 91.) die vierte geometrische Proportionallinie x zu finden.

Auflösung und Beweis. Man zeichne einen Winkel BAC und mache $AD = a$, $DF = b$, dann $AG = c$, ziehe DG und durch F die Linie $FH \parallel DG$; so ist:

$$AD : DF = AG : GH \text{ [§. 71. 1.]}, \text{ oder}$$

$$a : b = c : x. \text{ Es ist also } GH \text{ die verlangte vierte Proportionale.}$$

§. 75.

Erklärung. Aehnlichkeit der Figuren ist ihre Uebereinstimmung in Rücksicht der Form oder Qualität. Geradlinige Figuren sind *ähnlich*

a) wenn sie bey gleicher Seitenzahl die Winkel der Ordnung nach gleich haben, und

b) wenn ihre gleichliegenden Seiten in Proportion stehen.

Das Zeichen der Aehnlichkeit ist $\sim$.

I. Zusatz. Reguläre Figuren von gleicher Seitenzahl sind ähnlich, denn sie haben gleiche Winkel, und das Verhältniß der Seiten ist gleich.

II. Zusatz. Alle Kreise sind ähnlich [§. 66. Zus. I.].

§. 76.

Lehrsatz. Zwey Dreyecke sind ähnlich, wenn sie zwey Winkel gleich haben.

Beweis. (Fig. 92.) *Thes.* $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Daten. $A = a$, $B = b$. Es muß dann auch $C = c$ [§. 38. Zus. II.] seyn. Man lege das $\triangle abc$ auf das $\triangle ABC$, so, daß die Winkel a und A aufeinander zu

liegen kommen, so wird $b'c' \parallel BC$ seyn, da $b = B$ ist. Daher

$$Ab' : AB = Ac' : AC = b'c' : BC \quad [\S. 71. \text{ Lehrs. und III. Zus.}]$$

oder $ab : AB = ac : AC = bc : BC$, also

$$\triangle abc \sim \triangle ABC. \quad [\S. 75.]$$

§. 77.

Lehrsatz. Zwey Dreyecke sind ähnlich, wenn sie einen Winkel gleich haben, und wenn die ihn einschließenden Seiten in Proportion stehen.

Beweis. (Fig. 92.). *Thes.* $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Dat. $a = A$, und $ab : AB = ac : AC$.

Man lege beyde Dreyecke mit den gleichen Winkeln auf einander, so ist, da vermöge Daten

$Ab' : AB = Ac' : AC$ ist, auch

$b'c' \parallel BC$ [$\S. 71. \text{ Zus. II.}$]; folglich

ist $Ab'c' = B$ und $Ac'b' = C$ [$\S. 34. \text{ II.}$], oder

$b = B$ und $c = C$.

Mithin $\triangle abc \sim \triangle ABC$ [$\S. 76.$].

§. 78.

Lehrsatz. Zwey Dreyecke sind ähnlich, wenn darin alle gleichliegenden Seiten in Proportion stehen.

Beweis. (Fig. 93.). *Thes.* $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Dat. $ab : AB = ac : AC = bc : BC$.

Man mache $AD = ab$ und ziehe $DE \parallel BC$, so ist: AD oder $ab : AB = AE : AC$ [$\S. 71.$]. Es ist aber

$ab : AB = ac : AC$ [*Dat.*].

Mithin $AE = ac$. [*Arithm.*]

Auch ist: AD oder $ab : AB = DE : BC$ [$\S. 71.$]. Es

ist aber $ab : AB = bc : BC$ [*Dat.*],

also auch $DE = bc$. [*Arithm.*].

Es ist also $\triangle ADE \cong \triangle abc$ [$\S. 20.$].

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ [$\S. 76.$].

Mithin $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

§. 79.

Lehrsatz. Zwey Dreyecke sind ähnlich, wenn da-

rin zwey Seiten in Proportion stehen, und die, den grössern dieser Seiten gegenüberstehenden, Winkel gleich sind.

Beweis. (Fig. 93.) *Thes.* $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Daten. $a = A$ und $ab:AB = bc:BC$, aber
 $bc > ab$ und $BC > AB$.

Man mache $AD = ab$, und ziehe $DE \parallel BC$, so ist: AD oder $ab:AB = DE:BC$. [§. 71. Zus. III.]

Es ist aber $ab:AB = bc:BC$. [*Daten.*]

Mithin $DE = bc$. [Arithm.]

Es ist also $\triangle ADE \cong \triangle abc$. [§. 30.] Auch ist
 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ [§. 76.],

also auch $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Zusatz. Zwey rechtwinklige Dreyecke sind ähnlich, wenn eine Kathete und die Hypotenuse einander proportionirt sind.

§. 80.

Lehrsatz. Wenn man in einem rechtwinkligen Dreyecke von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse eine Senkrechte fällt, so sind

1) die zwey kleinern Dreyecke unter sich und dem ganzen ähnlich, und

2) die Senkrechte ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den abgeschnittenen Stücken der Hypotenuse.

Beweis. (Fig. 94.)

Thes. 1) $\triangle ABD \sim \triangle ABC \sim \triangle ADC$.

2) $BD:AD:DC$.

Daten. $BAC = R = o = m$.

ad 1) $BAC = o$

$x = x$.

Mithin $\triangle ABC \sim \triangle ABD$. [§. 76.]

Eben so ist $BAC = m$

$y = y$.

Also auch $\triangle ABC \sim \triangle ADC$ [§. 76.]

Daher $\triangle ABD \sim \triangle ABC \sim \triangle ADC$.

ad 2) Da $\triangle ABD \sim \triangle ADC$ ist, so ist auch
 $BD : AD = AD : DC$ [§. 75. b.], oder
 $BD : AD : DC$.

I. Zusatz. Jede Kathete des grossen Dreyeckes ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem ihr anliegenden Stücke; nemlich :

$BD : AB : BC$ [§. 75. b.], indem $\triangle ABD \sim \triangle ABC$,
 und $DC : AC : BC$ [§. 75. b.], da $\triangle ADC \sim \triangle ABC$ ist.

II. Zusatz. Eine Senkrechte, in irgend einem Puncte auf dem Diameter eines Kreises errichtet, ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten des Diameters, d. i. (Fig. 95.)

$$BD : AD : DC,$$

denn zieht man AB und AC , so ist $BAC = R$ [§. 58. Zus. III.]; mithin $BD : AD : DC$ [Lehrs. 2.].

III. Zusatz. Aus den beyden Proportionen des ersten Zusatzes dieses §. ist :

$$AB^2 = BD \cdot BC, \text{ und}$$

$$AC^2 = DC \cdot BC. \text{ Mithin}$$

$$AB^2 + AC^2 = BD \cdot BC + DC \cdot BC = [BD + DC] \cdot BC \\ = BC \cdot BC = BC^2,$$

d. h. wenn man die Seiten des rechtwinkligen Dreyeckes durch einerley Maass misst [§. 67.], mithin ihre Grösse in Zahlen bestimmt, so ist die Quadrat-Zahl der Hypotenuse der Summe der Quadrat-Zahlen der beyden Catheten gleich. Man kann daher in jedem rechtwinkligen Dreyecke aus 2 Seiten die dritte durch obige Gleichung finden.

§. 81.

Aufgabe. (Fig. 95.) Zu 2 gegebenen geraden Linien, a und b , die mittlere geometrische Proportionale zu finden.

Auflösung und Beweis.

Man mache $BD = a$ und $DC = b$, halbire BC und beschreibe darüber einen Halbkreis, errichte in D auf BC die Senkrechte AD , so ist diese die verlangte Linie; denn es ist

$$BD : AD : DC \text{ [§. 80. Zus. II.], oder } a : AD : b.$$

Lehrsatz. Wenn sich in einem Kreise 2 Sehnen schneiden, so bilden die Stücke der einen Sehne die äusseren und die der andern die inneren Glieder einer geometrischen Proportion.

Beweis. (Fig. 96.) *Thes.* $AE : CE = ED : EB$.

Dat. Man ziehe AC und BD , so ist

$$o = n \text{ [§ 10. Zus.]}$$

$$x = y \text{ [§. 58. Zus. I.]}$$

Also $\triangle ACE \sim \triangle DEB$ [§. 76.], und daher
 $AE : CE = ED : EB$.

I. Zusatz. (Fig. 97.) Schneiden sich die Sehnen verlängert ausserhalb des Kreises, so verhalten sich ihre Stücke ausserhalb des Kreises umgekehrt wie die Secanten, d. i.

$AD : AE = AC : AB$; denn, zieht man DE und BC , so ist

$$p + n = 2R = n + x \text{ [§. 58. Zus. IV.]};$$

also auch $p = x$. Es ist auch

$$A = A.$$

Mithin $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, [§. 76.] und

$$AD : AE = AC : AB.$$

II. Zusatz. (Fig. 98.) Schneidet eine Sehne verlängert eine Tangente, so ist diese die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Secante und ihrem Stücke ausserhalb des Kreises, d. i.

$AD : AB : AC$, denn, zieht man CB und DB , so ist

$$A = A$$

$$o = C \text{ [§. 59.]}$$

Also $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ [§. 76.], und

$$AD : AB : AC.$$

Lehrsatz. In ähnlichen Dreyecken verhalten sich die Höhen wie die Grundlinien.

Beweis. (Fig. 99.) *Thes.* $ad : AD = bc : BC$.

Dat. $\triangle abc \sim \triangle ABC$;

folglich $b = B$ [§. 75.], und da auch
 $adb = ADB = R$ ist, so ist

$$\triangle abd \sim \triangle ABD \text{ [§. 76.] und } ab : AB = ad : AD. \text{ Auch ist } ab : AB = bc : BC.$$

Mithin auch $ad : AD = bc : BC.$

§. 84.

Lehrsatz. Aehnliche geradlinige Figuren werden durch gleichliegende Diagonalen in ähnliche Dreyecke getheilt.

Beweis. (Fig. 100.)

Thes. 1) $\triangle abc \sim \triangle ABC.$

2) $\triangle ace \sim \triangle ACE.$

Dat. $abcde \sim ABCDE$, daher

$$b = B, \text{ und}$$

$$ab : bc = AB : BC \text{ [§. 75.].}$$

Also $\triangle abc \sim \triangle ABC$ [§. 77.].

Es muß also auch $bac = BAC$, und

$ac : AC = ab : AB = ae : AE$ seyn, und da auch $bae - bac = BAE - BAC$, oder

$$cae = CAE \text{ ist, so muß}$$

auch $\triangle ace \sim \triangle ACE$ [§. 77.] seyn.

Dafs $\triangle ced \sim \triangle CED$ ist, folgt aus Th. 1. Ueberhaupt gibt es hier nur zweyerley Arten von Dreyecken, die eine Art hat zwey Polygons-Seiten und eine Diagonale, und die zweyte zwey Diagonalen und eine Polygons-Seite. Daher die zwey Thesen.

Zusatz. Gleichliegende Diagonalen ähnlicher Polygone verhalten sich wie zwey gleichliegende Polygons-Seiten.

§. 85.

Lehrsatz. Die Perimeter ähnlicher Figuren verhalten sich wie zwey gleichliegende Polygons-Seiten oder Diagonalen.

Beweis. (Fig. 100.).

Thes. $\text{perim.} : PERIM. = ab : AB = ac : AC.$

Dat. $abcde \sim ABCDE$, also:

$$\left. \begin{aligned} ab : AB &= ab : AB. \\ bc : BC &= ab : AB. \\ cd : CD &= ab : AB. \\ de : DE &= ab : AB. \\ ea : EA &= ab : AB. \end{aligned} \right\} \text{ [§. 75.] } \text{ Folglich}$$

$$ab + bc + cd + de + ea : AB + BC + CD + DE + EA = 5ab : 5AB,$$

$$\text{oder perim. : PERIM.} = ab : AB$$

$$,, \quad ,, \quad = ac : AC. \text{ [§. 84. Zus.]}$$

I. Zusatz. (Fig. 101.) Die Seiten und Perimeter gleichnamiger regulärer Vielecke verhalten sich wie die Radien oder Diameter, der darum beschriebenen Kreise, d. i., wenn $abcdef \propto ABCDEF$ ist, so ist:

$$\text{perim. : PERIM.} = ab : AB = r : R = d : D.$$

Denn es ist

$$\text{perim. : PERIM.} = ab : AB \text{ [Lehrs.].}$$

$$ab : AB = ah : AH, \text{ weil } \triangle abh \propto \triangle ABH.$$

$$\text{Mith. perim. : PERIM.} = ab : AB = ah : AH = r : R, \\ \text{oder} = 2ah : 2AH = d : D.$$

II. Zusatz. Die Peripherien der Kreise verhalten sich wie ihre Radien oder Durchmesser.

§. 86.

Aufgabe. (Fig. 102.) Aus der Seite eines regulären n Eckes $AB = a$ und aus dem Radius des darum beschriebenen Kreises $AC = r$ die Seite eines regulären $2n$ Eckes $AD = b$, in demselben Kreise, zu finden.

Auflösung. Man ziehe AC , CB und CD .

$$\text{Es ist } AE = EB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} a. \text{ [§. 23. Zus. IV.]}$$

$$AEC = R = AED \text{ [§. 23. Zus. IV.], daher}$$

$$AD^2 = AE^2 + ED^2 = \frac{1}{4} a^2 + ED^2. \text{ [§. 80. Z. III.]}$$

$$ED = CD - CE = r - \sqrt{AC^2 - AE^2} = r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2},$$

$$\text{und } ED^2 = r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2} + r^2 - \frac{1}{4} a^2.$$

$$= 2r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2} - \frac{1}{4} a^2$$

$$= 2r [r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2}] - \frac{1}{4} a^2. \text{ Folglich}$$

$$AD^2 = \frac{1}{4} a^2 + 2r [r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2}] - \frac{1}{4} a^2, \text{ und}$$

$$AD = \sqrt{2r [r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2}]}.$$

I. Zusatz. Setzt man $r = a = 1$, d. i. nimmt man a als die Seite eines regulären Sechseckes an [§. 65.], so erhält man die Seite des regulären Zwölfeckes $b = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0,51763809\dots$

II. Zusatz. Sucht man aus der Gleichung,

$$b = \sqrt{2r[r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2}]}$$

den Werth von $a = \frac{b}{r}\sqrt{4r^2 - b^2}$, so hat man die Formel für die Seite eines regulären n Eckes durch die des regulären $2n$ Eckes und den Radius des darum beschriebenen Kreises ausgedrückt.

§. 87.

Lehrsatz. Das Verhältniß des Diameters zur Peripherie eines Kreises ist $= 1:3,1415\dots = 1:\pi$.

Beweis. Man setze den Radius $= 1$, so ist der Perimeter eines im Kreise beschriebenen regulären Sechseckes $= 6$ [§. 65.]. Man suche die Seite des regulären Zwölfeckes [§. 86. Zus. I.]; sie ist $= 0,517638\dots$; folglich der Perimeter des Zwölfeckes $= 6,211656\dots$. Auf ähnliche Art erhält man mit Hilfe des §. 86. den Perimeter des regulären Vierundzwanzigeckes, Achtundvierzigeckes, Sechsendneunzigeckes etc. Setzt man dieses Verfahren fort, so ergibt sich der Perimeter eines 768 Eckes $= 6,2830\dots$. Nun ist dieses Vieleck vom Kreise sehr wenig unterschieden [§. 66. Zus. I.]; mithin ist für den Kreis:

$$\text{Diam. : Periph.} = 2:6,2830\dots \text{ oder}$$

$$d : p = 1:3,1415\dots = 1:\pi$$

Setzt man, wie oben, die Vervielfachung der Polygons-Seiten noch weiter fort, und rechnet man überhaupt mit mehr Decimalstellen, so ergibt sich dafs:

$$d:p = 1:3,14159265358979323846264338327950288\dots$$

welche letztere Zahl gewöhnlich durch π bezeichnet wird. Sie heisst von ihrem Finder die Ludolphische Zahl. Im Gebrauche bey Berechnungen nimmt man von dieser Zahl nach Erforderniß der größern oder

geringern Schärfe mehr oder weniger Decimalstellen. *)

VII. A b s c h n i t t.

A. *Messung der geraden und Kreis-Linien, so wie auch der Winkel.*

§. 88.

Erklärung. a) Nach §. 67. heisst Messen nichts anders, als angeben, wie oft eine bestimmte Grösse (*Maß*) in einer andern gegebenen enthalten ist. Das Maß ist die *Einheit*, womit man die zu messende Grösse vergleicht, um ihr Verhältniß zu dieser Einheit durch eine Zahl auszudrücken. Es muß stets das zu Messende mit dem Maße gleichartig seyn.

Das gewöhnlichste Maß für Linien (*Längenmaß*) ist der *Fuß* oder *Schuh*, eine Länge die zwar in verschiedenen Gegenden verschieden, aber jedes Mahl als bekannt vorausgesetzt ist.

Die Eintheilung des Fußs ist zweyfach, entweder

- 1) *geometrisch*, oder *zehntheilig*, daher *Decimalmaß*. Nach dieser theilt man den Fuß in 10 *Zoll*, den Zoll in 10 *Linien* und die Linie in 10 *Scrupel*. Zehn Fuß geben eine *geometrische Ruthe*.
- 2) oder *zwölftheilig*, daher *Duodecimalmaß*. Hier theilt man den Fuß in 12 *Zoll*, den Zoll in 12 *Linien*, und die Linie in 12 *Scrupel*. Zwölf Fuß geben eine *Duodecimalruthe*.

Man bezeichnet Ruthen mit $^{\circ}$, Fuß mit $'$, Zoll mit $''$, Linien mit $'''$, Scrupel mit $''''$, welche Zeichen man rechts über die Zahlen setzt. So heisst z.B. $3^{\circ} 2' 5'' 6''' 4''''$ drey Ruthen, 2 Schuh, 5 Zoll, 6 Linien und 4 Scrupel.

*) Archimedes fand $d:p=7:22$, und $d:p=71:223$. Ersteres Verhältniß gibt die Peripherie zu groß, letzteres zu klein an. Des Adrian Metius Verhältniß, $113:355$, gibt die Peripherie bis auf die siebente Decimalstelle richtig, ist aber sehr unbequem.

Folgende Tabellen geben einen allgemeinen Ueberblick über die

Eintheilung des Längenmaßes.

a. Decimalmafs.

Fufs.	Zoll.	Linien.	Scrupel.
1'.	10.	100.	1000.
	1."	10.	100.
		1.***	10.
			1.****

b. Duodecimalmafs.

Fufs.	Zoll.	Linien.	Scrupel.
1'.	12.	144.	1728.
	1."	12.	144.
		1.***	12.
			1.****

Eine Linie messen heisst ihre Länge durch Ruthen, Fufs, Zoll etc. angehen. Bey geometrischen Berechnungen nimmt man gewöhnlich das Decimalmafs.

Ein Körper, worauf das Längenmafs mit seinen Unterabtheilungen gezeichnet ist, heisst ein *Maßstab*.

Der alte Pariser - Fufs (pied du Roi) wird nach der Duodecimaleintheilung in 144 Pariser - Linien getheilt; von diesen nimmt man noch Zehntel, Hundertel, u. s. w. Das Verhältniß des Baierischen zu diesem Pariser-Fufs ist $\approx 1000 : 1113$.

b) Das neue Französische Längenmafs ist der *Mètre* (mètre définitif), der zehnmillionste Theil des Quadranten des Erd-Meridians, und ist $\approx 3' 11'' , 296$ Pariser - Mafs. Die weitere Eintheilung des Mètre ist: Deciméter, Centiméter, Milliméter d. i. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ und $\frac{1}{1000}$ des Mètre; ferner Decaméter, Hectométer, Kilomètre, Myriamètre d. i. 10, 100, 1000, 10000 Mètre.

§. 89.

1) *Aufgaben.* Was geben 15° Duodecimalmafs im Decimalmaße ausgedrückt?

1) *Auflösung.* Da $1^{\text{duod.}^\circ} = 12'$ und $1^{\text{dec.}^\circ} = 10'$ ist,
so ist $15^{\text{dd.}^\circ} : x^{\text{d.}^\circ} = 10 : 12$,
woraus $x = 18^\circ$ Decimalmafs ist.

2) *Auflösung.* Da $1^{\text{duod.}^\circ} = 12'$ u. $1^{\text{dec.}^\circ} = 10'$ ist,
so mufs $1^{\text{dd.}^\circ} : 1^{\text{d.}^\circ} = 12 : 10$ und
 $10^{\text{dd.}^\circ} : 12^{\text{d.}^\circ} = 15^{\text{dd.}^\circ} : x^{\text{d.}^\circ}$, folglich ist
 $10^{\text{dd.}^\circ} : 12^{\text{d.}^\circ} = 15^{\text{dd.}^\circ} : x^{\text{d.}^\circ}$, oder
 $10 : 12 = 15 : x$, und
 $x = 18^\circ$ Decimalmafs.

2) Was geben $3'' 6'''$ Decimalmafs im Duodecimalmafs?

Auflösung. Es ist $3'' 6''' = 36'''$ Decimalmafs, und
 $36^{\text{dd}''} : x^{\text{dd}''} = 100 : 144$, woraus
 $x = 51,84'''$ Duodecimalmafs oder
 $= 4'' 3''' 10''''$ „ „

3) Was geben $3^\circ 1' 6''$ Duodecimalmafs im Decimalmafs?

Auflösung. Es ist $3^\circ 1' 6'' = 450''$ Duodecimalmafs, und $450^{\text{dd}''} : x'' = 12 : 10$, woraus
 $x = 375''$ Decimalmafs, oder
 $= 3^\circ 7' 5''$ „ „ ist.

4) Was geben 423,2 Pariser-Fufs im Baierischen Mafs?

Auflösung. Es ist $423,2^{\text{p}'} : x^{\text{b}'} = 1000 : 1113$ [§. 88.],
daher $x = 471,02$ Baierische Fufs.

5) Was geben 5000 Mètre im Baier. Mafs?

Auflösung.

Es ist: Paris. Fufs : Mètre $= 1 : 3,078445$, [§. 88. b.]
und Baier.Fufs : Paris.Fufs $= 1000 : 1113$. [§. 88.]

Daher Baier. Fufs : Mètre $= 1000 : 1113 \cdot 3,078445$
 $= 1 : 3,4263 \dots$

folglich $5000^m : x^{b'} = 1 : 3,4263\dots$
und $x = 17131,5$ Baier. Fufs.

Aufgaben zur Uebung.

- 1) Was geben $6^\circ 2' 7'' 8''' 5''''$ Decimalmafs in Duodecimalmafs?
- 2) Was betragen 24° Decimalmafs im Duodecimalmafs?
- 3) Was geben $1^\circ 1' 2'' 8'''$ Duodecimalmafs im Decimalmafs?
- 4) Wieviel betragen 100 Baierische Fufs nach dem Wiener Fufsmafs, wenn ein Baier. Fufs $= 120,38$ und ein Wiener Fufs $= 140,13$ Pariser Linien ist?
- 5) Was geben 400' Baier. Mafs im Pariser Mafs?
- 6) Was geben $112^\circ 7' 8''$ Baier. Duodecimalmafs im Pariser Mafs?
- 7) Was geben 236 Baier. Fufs in Mètre?
- 8) Was betragen 230,7 Mètre im Baierischen und was im Pariser Mafs?

§. 90.

Aufgabe. Einen Mafsstab zu verfertigen.

Auflösung. (Fig. 103.) Man ziehe AB und trage darauf mehrere gleiche Theile AE, EB etc. auf. In A, E, B , etc. errichte man auf AB Senkrechte [§. 23. 1.], und gebe ihnen beliebige, aber unter sich gleiche, Längen $AC = EF = BD$ etc. Man theile AC , beym Decimalmafs in 10, und beym Duodecimalmafs in 12 gleiche Theile und ziehe durch alle Theilungspuncte Parallelen zu AB [§. 36.], setze auch an AC oder EF die Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. Eben so theile man AE in 10 oder 12 gleiche Theile. Endlich setze man an den Punct E eine Nulle, an den ersten Theilungspunct von F gegen C die Zahl 10, an den zweyten unterhalb 20, an den dritten oben 30 etc. (wie Fig. 103.). Dann ziehe man gerade Linien von 0 bis 10, von a

bis b , von 20 bis 30, von c bis d etc., so ist der Mafsstab vollendet.

Beweis. Man nehme an $AE = 100'$, so ist

$$Ea = F10 = \frac{1}{10} AE = 10'.$$

Eben so ist $E20. = 2.Ea. = \frac{2}{10} AE = 20'$ etc.

Nun ist $EF : E1. = F10. : 1g.$ [§. 71. Zus. III.]

Es ist aber $E1. = \frac{1}{10} EF.$ [Constr.], folglich auch

$$1g = \frac{1}{10} F10. = 1'.$$

Eben so ist $EF : E6. = F10 : 6h.$ [§. 71. Zus. III.]

und da $E6 = \frac{6}{10} EF$ [Constr.] ist, so muß auch

$$6h = \frac{6}{10} F10 = 6' \text{ seyn etc.}$$

Diesem zu Folge ist:

$$1k = kg + g1 = Ea + g1 = 10' + 1' = 11',$$

und $6l = 36'$, dann $mh = 100' + 6' = 106'$ und

$$ml = 136' \text{ etc.}$$

I. Zusatz. Beträgt die Länge des Mafsstabes 10 AE , so heißt er ein tausendtheiliger.

II. Zusatz. In Baiern ist es gewöhnlich dem tausendtheiligen Mafsstabe die Länge eines ganzen oder halben Baier. Schuh, mithin jeder Abtheilung wie AE , EB etc. die Länge eines ganzen oder halben Baier. Decimalzoll's zu geben.

III. Zusatz. Will man die Länge einer geraden Linie auf dem Papiere messen, so fasse man sie mit dem Zirkel, und untersuche ihr Mafs durch das gehörige Anlegen dieser Zirkelöffnung an den Mafsstab.

§. 91.

Aufgabe. Die Peripherie p eines Kreises aus dessen Radius r oder Diameter d zu berechnen.

Auflösung. Man messe den Diameter d oder Radius r und multiplicire den Diameter oder doppelten Radius durch die Ludolphische Zahl π .

Beweis. Es ist für alle Kreise:

$$d : p = 1 : \pi \text{ [§. 87.]; folglich}$$

$$p = d \pi \text{ oder } 2 r \pi$$

Beyspiel. Ist $d = 7'$, so ist $p = d \pi$
 $= 7. 3,141.$

$$= 21,987' = 2^{\circ} 1' 9'' 8''' 7'''' [\S. 88.]$$

Zusatz. Aus $p = d \pi$ ergibt sich, daß $d = \frac{p}{\pi}$ ist, d. h. man findet den Diameter eines Kreises, wenn man dessen Peripherie durch die Ludolphische Zahl dividirt.

Beyspiele zur Uebung.

- 1) Wie groß ist die Peripherie eines Kreises dessen Radius $= 6' 7''$ ist?
- 2) Die Peripherie eines Kreises ist $7^{\circ} 3' 8''$; wie groß ist dessen Radius und Durchmesser?
- 3) Der größte Umkreis der Erde ist 5400 Meilen, wie groß der Diameter?

§. 92.

Erklärungen. a) Um Winkel zu messen bedarf man eines Winkels als Maß. Dieses Maß ist der rechte Winkel, denn alle rechten Winkel sind gleich [*§. 9. Zus. II.*]. Der neunzigste Theil eines rechten Winkels heißt ein *Grad*, der sechzigste eines Grades eine *Minute*, und der sechzigste Theil einer Minute eine *Secunde*. Man nennt diese Eintheilung *Sexagesimaleintheilung*.

Grade, Minuten und Secunden werden dadurch bezeichnet, daß man rechts über die Zahlen die Zeichen $^{\circ}$, $'$, $''$ setzt; so z. B. heißt $15^{\circ} 12' 36'' = 15$ Grade 12 Minuten und 36 Secunden.

I. Zusatz. Ein gerader Winkel hat 180° , und die Summe aller Winkel rings um einen Punct in einer Ebene beträgt 360° . [*§. 9. Zus. III. u. VI.*]

II. Zusatz. Betrachtet man den Winkel als Centralwinkel eines Kreises, so ergibt sich, daß durch die Theilung des rechten Winkels auch der Quadrant in 90 gleiche Theile getheilt wird, welche man ebenfalls Grade nennt. Dasselbe gilt von den Unterab-

theilungen in Minuten, Secunden etc. Der Halbkreis hat demnach 180° und die ganze Peripherie 360° etc.

b) Auch das Französische Winkelmaß weicht von unserer Eintheilung des Quadranten in 90° (*Degrés*) ab. In Frankreich hat man für Winkel und Umkreis auch die Centesimaltheilung d. i. man theilt einen Quadranten in 100 Grade (*Grades*), einen Grad in 100 Minuten und eine Minute in 100 Secunden. Die ganze Peripherie des Kreises beträgt also 400° .

c) Das Messen eines Winkels auf dem Papiere geschieht durch das Auflegen des Transporteurs (eines auf einem flachen Körper gezeichneten und in ganze und halbe Grade etc. getheilten Halbkreises) und durch das Abzählen der, durch die Schenkel des Winkels abgeschnittenen, Grade etc. Diese Winkelmessung ist nur eine beyläufige Schätzung des Winkels. Von der genauen Winkelmessung handelt die Trigonometrie.

§. 93.

Aufgabe. Man soll die Französische, oder Centesimaltheilung der Winkel auf unsere Sexagesimaltheilung reduciren.

Auflösung und Beweis. Es sind $100 \text{ Grades} = 90 \text{ Degrés}$, also $1 \text{ Grade} = \frac{9}{10} \text{ Degrés}$ d. h. wenn man von der Zahl der *Grades* den zehnten Theil derselben subtrahirt, so erhält man die entsprechende Zahl der *Degrés*, d. i. ganze Grade mit einem Dezimalbruche, der nun weiter in Minuten und Secunden, durch ein fortgesetztes Multipliciren mit 60, verwandelt wird. Z. B. Man soll $101^\circ 66' 95''$ Französisches Winkelmaß in unser Sexagesimalmaß nach Graden, Minuten etc. verwandeln.

Es ist $101^\circ 66' 95'' = 101,6695^\circ$, davon $\frac{1}{10}$
subtrahirt 10,16695, gibt

$101^\circ 66' 95'' \text{ Centes. Einth.} = 91,50255 \text{ Grade}$, welche im Sexagesimalmaße $91^\circ 30' 9,18''$ betragen.

Zusatz. Bey der umgekehrten Reduction der Sexagesimal- auf die Centesimaltheilung verwandeln

man die Minuten und Secunden der ersteren in einen Dezimalbruch, und addire dem ganzen Ausdrucke sein Neuntel. Denn, da $1 \text{ Grade} = \frac{2}{10} \text{ Degré}$ ist, so muß $1 \text{ Degré} = \frac{10}{9} \text{ Grades}$ seyn. Z. B. Nach der Sexag. Einth. ist:

$$\begin{array}{r} 38^{\circ} 42' = 38,7^{\circ}, \text{ dazu} \\ \frac{38,7}{9} = 4,3 \text{ addirt, gibt} \end{array}$$

$$38^{\circ} 42' \text{ Sex. Einth.} = 43^{\circ} \text{ Centesim. Einth.}$$

§. 94.

Aufgabe. Aus dem Diameter d und der Anzahl der Grade n eines Bogens die Länge desselben a zu finden.

Auflösung.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } n^{\circ} : 360^{\circ} &= a : p \\ &= a : d\pi \text{ [§. 91.];} \end{aligned}$$

$$\text{folglich } a = d\pi \frac{n^{\circ}}{360^{\circ}} = 2r\pi \frac{n^{\circ}}{360^{\circ}}.$$

Beyspiel. Für $d = 6'$ und $n = 50^{\circ}$ ist:

$$a = 6 \cdot 3,141 \cdot \frac{50}{360} = 2,617 \dots = 2' 6'' 2''' \text{ beynahe.}$$

Hält der Bogen, n , Minuten und Secunden, oder Grade, Minuten und Secunden, so muß man sowohl den Zähler als den Nenner des Bruches $\frac{n^{\circ}}{360^{\circ}}$ auf die kleinste Benennung, Secunden, reduciren.

Zusatz. Aus $a = d\pi \frac{n^{\circ}}{360^{\circ}}$ ist $n^{\circ} = \frac{360^{\circ} \cdot a}{d\pi}$, woraus die Anzahl Grade, aus dem Diameter und aus der Länge des Bogens berechnet wird.

B. Berechnung der ebenen Figuren.

§. 95.

Erklärung. Das Maß einer Fläche ist ebenfalls eine Fläche. Das gewöhnlichste Maß zu geometrischen Messungen ist der Quadrat-Fuß, d. i. ein Quadrat, wovon die Seite einen Fuß mißt. [§. 41. a.]. Man theilt ihn

1) nach der Decimaleintheilung in 100 kleinere Quadrate, Quadrat-Zoll, jeden Quadrat-Zoll in 100

kleinere Quadrate, *Quadrat - Linien*, und jede *Quadrat - Linie* wieder in 100 Quadrate, *Quadrat - Scrupel*. 100 *Quadrat - Fufs* bilden eine *Decimalquadrat - Ruthe*.

2) nach der *Duodecimaleintheilung* in 144 *Quadrat - Zoll*, jeden *Quadrat - Zoll* in 144 *Quadrat - Linien* und jede *Quadrat - Linie* in 144 *Quadrat - Scrupel*. 144 *Quadrat - Fufs* geben eine *Duodecimalquadrat - Ruthe*.

Man bezeichnet 6 *Quadrat - Ruthen*, 7 *Quadrat - Fufs*, 18 *Quadrat - Zoll* etc. durch $6\Box^{\circ} 7\Box' 18\Box''$.

Folgende Tabelle gewährt eine allgemeine Uebersicht über die

Eintheilung des Flächenmasses.

a. Decimalmass.

$\Box$ Fufs.	$\Box$ Zoll.	$\Box$ Linien.	$\Box$ Scrupel.
1.	100.	10000.	1000000.
	1.	100.	10000.
		1.	100.

b. Duodecimalmass.

$\Box$ Fufs.	$\Box$ Zoll.	$\Box$ Linien.	$\Box$ Scrupel.
1.	144.	20736.	2085984.
	1.	144.	20736.
		1.	144.

Eine Figur berechnen heisst angeben wieviel *Quadrat - Ruthen*, *Quadrat - Fufs*, *Quadrat - Zoll* etc. in ihr enthalten sind.

Das Französische Flächenmass ist das Quadrat des Decameters [§. 88. b.], *Are* genannt, (948,66 Pariser-*Quadrat - Fufs*). Ein *Are* enthält 10 *Déciare* oder 100 *Centiare*, so, dass ein *Centiare* ein *Quadrat - Metre* ist. 100 *Are* geben ein *Hectare* und 100 *Hectare* ein *Myriare*.

§. 96.

Aufgaben. 1) Was geben $5^{\circ} 2' 45''$ Decimalmafs im Duodecimalmafs?

Auflösung. $5^{\circ} 2' 45'' = 50245''$ Decim. Mafs.

$$50245^d : x^{dd} = 100 : 144, \text{ woraus}$$

$$x = 72352,8'' = 3^{\circ} 70' 64'' 115''' 28,8''''$$

Dd. Mafs.

2) Was geben $2'' 5'''$ Duodecimalmafs im Decimalmafs ausgedrückt?

Auflösung. Es ist $2'' 5''' = 41477'''$ Duod. Mafs.

$$41477^{dd} : x^d = 2985984 : 1000000, \text{ woraus}$$

$$x = 13890,56''' = 1'' 38''' 90,6''''$$

Decimalmafs.

Zur Uebung.

- 1) Was geben 9° Duod. M. im Dec. M.?
- 2) Was geben 25° Dec. M. im Duod. M.?
- 3) Was geben $4^{\circ} 7'$ Dec. M. im Duod. M.?
- 4) Was geben $1^{\circ} 36' 95'''$ Duod. M. im Decim. Mafse?

§. 97.

Aufgabe. (Fig. 104.) Ein Parallelogramm $AD = P$ zu berechnen.

Auflösung und Beweis. Man messe dessen Grundlinie $CD = B$ und Höhe $AE = H$ durch einerley Mafs z. B. Fufs etc., und vergleiche das Parallelogramm mit dem Quadrat-Fufs ad , worin $ac = cd = 1$ ist; nämlich:

$$ad : P = ac . cd : AE . CD. \quad [\S. 70. \text{Zus.}]$$

$$= 1 : H . B$$

d. h. der Quadrat-Fufs, ad , ist im Parallelogramme P so oft enthalten, als 1 in dem Producte $H . B$. Man findet also die Zahl der $\square'$ etc., welche das Parallelogramm enthält, durch das Product aus der Grundlinie und Höhe.

I. Zusatz. Man berechnet ein Quadrat, wenn man das Mafs einer Seite quadriert. (Daher in der Arithmetik das Wort Quadrat für ein Product aus zwey gleichen Factoren). Bey Berechnung des Rechteckes multiplicirt man zwey anstossende Seiten.

II. Zusatz. Man berechnet ein Dreyeck, wenn man dessen Grundlinie und Höhe multiplicirt, und das Product durch zwey dividirt. [§. 42. Zus. III.]

Beyspiele.

1) In Fig. 104. sey $CD = 8' 7''$, $AE = 6' 8'' 3'''$, Wieviel beträgt der Inhalt des Parallelogramms?

Auflösung. Es ist $P = B \cdot H = 8,7' \times 6,83' = 8,7 \times 6,83 = 59,421 \square' = 59 \square' 42 \square'' 10 \square'''$

2) In einem Rechtecke misst eine Seite $30^\circ 3' 6''$, die daranstossende $54^\circ 7' 8''$; wie grofs ist sein Inhalt M ?

Auflösung. $M = B \cdot H = 30,36^\circ \times 54,78^\circ = 39,36.54,78 = 2156,1408 \square^\circ = 2156 \square^\circ 14 \square' 8 \square''$ [I. Zus.].

3) In einem Dreyecke misst die Grundlinie $8' 6''$ die Höhe $5' 3'''$; was ist der Inhalt?

Auflösung. $M = \frac{1}{2} B \cdot H$ [II. Zus.] $= \frac{1}{2} \cdot 8,6' \cdot 5,03' = \frac{1}{2} \cdot 8,6 \cdot 5,03 = 21,629 \square' = 21 \square' 62 \square' 90 \square'''$.

4) In einem Dreyecke misst die Grundlinie $12'$ die Höhe $3' 4'''$; wie grofs ist seine Fläche?

Auflösung.
 $M = \frac{1}{2} \cdot 12 \times 3,004 = 18,024 \square' = 18 \square' 2 \square'' 40 \square'''$.

Zur Uebung.

1) Welchen Flächeninhalt hat ein Quadrat, dessen Seite $3^\circ 7''$ misst?

2) Welchen Inhalt hat ein Parallelogramm, dessen Grundlinie $3^\circ 6''$ und dessen Höhe $9' 3''$ lang ist?

3) Wie grofs ist das Rechteck, dessen Länge $9^\circ 8$ und dessen Breite $8' 9''$ ist?

- 4) Wie groß ist ein Dreyeck, dessen Grundlinie $9^{\circ} 6' 3''$ und dessen Höhe $1^{\circ} 9''$ beträgt?
- 5) In einem rechtwinkligen Dreyecke ist die eine Kathete $9' 8''$ die andere $1^{\circ} 1'$, wie groß ist sein Inhalt?
- 6) Wie groß ist die Höhe eines Parallelogramms, dessen Inhalt $36^{\circ} 9'$ und dessen Grundlinie $8^{\circ} 9'$ ist?
- 7) Die Fläche eines Quadrats hält $1824^{\circ} 62'$, wie groß ist eine Seite?
- 8) Wie groß ist die Grundlinie eines $80'$ großen Dreyeckes, wenn die Höhe $7' 3''$ beträgt?

§. 98.

Aufgabe. (Fig. 50.) Ein Trapez zu berechnen.

Auflösung. Man messe die beyden Parallelen AB und CD , so wie ihren Abstand AE , durch einerley Maß, und nehme das halbe Product aus der Summe der Parallelen in die Höhe.

Beweis. Man ziehe AD , so ist:

$$\begin{aligned} \text{Trap.} &= \triangle ACD + \triangle ABD \\ &= \frac{1}{2} CD \cdot AE + \frac{1}{2} AB \cdot AE \\ &= \frac{1}{2} AE [CD + AB]. \end{aligned}$$

Beyspiel. Gesetzt $AE = 6' 3''$, $AB = 12' 7''$, $CD = 18'$. Wie groß ist der Inhalt?

Zusatz. Jede geradlinige Figur wird berechnet, indem man sie durch Diagonalen, die sich nicht schneiden, in Dreyecke theilt, diese einzeln berechnet [§. 97. Zus. II.], und ihre Werthe summirt.

§. 99.

Aufgabe. Den Flächeninhalt eines regulären n Eckes aus einer Seite a , und dem Radius des, darum beschriebenen, Kreises r zu finden.

Auflösung und Beweis. (Fig. 80.)

$BG = r$, $BC = a$, $BL = \frac{1}{2} a$. Es ist

$\text{Pol.} = n \cdot \Delta BCG$ [§. 63. Zus. I.]

$= n \cdot \frac{1}{2} a \cdot GL$ [§. 97. Zus. II.]

$= \frac{1}{2} a n \sqrt{BG^2 - BL^2}$ [§. 80. Zus. III.]

$= \frac{1}{2} a n \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2}$

$= \frac{1}{4} a n \sqrt{4r^2 - a^2}$

$= \frac{1}{4} a n \sqrt{[2r + a][2r - a]}.$

I. Zusatz. Ist das reguläre Polygon ein Sechseck, oder $n = 6$ und $a = r$ [§. 65.], so ist:

$\text{Pol.} = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}.$

Beispiel. Die Seite eines regulären Sechseckes ist 3' 7'', wie groß der Inhalt?

II. Zusatz. Aus obiger Formel,

$P = \frac{1}{4} a n \sqrt{4r^2 - a^2}$, ist:

$$1) \quad r = \frac{\sqrt{[16 P^2 + a^4 n^2]}}{2 a n}$$

$$2) \quad a = \sqrt{2[r^2 \pm \frac{1}{n} \sqrt{[r^2 n + 2P][r^2 n - 2P]}]}$$

$$3) \quad n = \frac{4P}{a \sqrt{[4r^2 - a^2]}} = \frac{4P \sqrt{[4r^2 - a^2]}}{a [4r^2 - a^2]}$$

$$= \frac{4P \sqrt{[2r + a][2r - a]}}{a [2r + a][2r - a]}$$

§. 100.

Aufgabe. Eine Kreisfläche zu berechnen.

Auflösung und Beweis. Setzt man die Kreisfläche K und den Radius r , so ist:

$K = \frac{1}{2} p \cdot r = \frac{1}{2} 2r \pi \cdot r = r^2 \pi$. [§. 66. Zus. II. §. 97. II. Zus. und §. 91.]

$= \frac{1}{4} d^2 \pi$, da $r^2 = \frac{1}{4} d^2$ ist.

Beispiel. Wie groß ist der Kreis, dessen Radius 8' 7'' groß ist?

I. Zusatz. Aus $K = r^2 \pi = \frac{1}{4} d^2 \pi$ ist:

$$r = \sqrt{\frac{K}{\pi}} \text{ und } d = 2 \sqrt{\frac{K}{\pi}}$$

II. Zusatz. (Fig. 105.) Es ist der Kreisausschnitt oder

Sect. $ABC = r^2 \pi \frac{n^\circ}{360^\circ}$; denn

Sect. $ABC = \frac{1}{2} AB \cdot \text{Bog. } BC$, [§. 66. Zus. III.]

$$= \frac{1}{2} r \cdot 2 r \pi \frac{n^\circ}{360^\circ} \text{ [§. 94.]}$$

$$= r^2 \pi \frac{n^\circ}{360^\circ}.$$

III. Zusatz. Aus $S = r^2 \pi \frac{n^\circ}{360^\circ}$ ist $n^\circ = \frac{360 S}{r^2 \pi}$ und

$$r = \sqrt{\left[\frac{360^\circ S}{n^\circ \pi} \right]}.$$

IV. Zusatz. Segment. $BDC = \text{Sect.} - \Delta ABC$.
[§. 13. b.]

V. Zusatz. Der zwischen zwey concentrischen Kreisen liegende Ring (Fig. 18.), wenn R und r die Radien sind, ist $= R^2 \pi - r^2 \pi = \pi [R^2 - r^2]$
 $= \pi [R+r] [R-r]$.

Beyspiele.

- 1) Der Winkel des Kreisausschnitts ist $36^\circ 12'$, der Radius $3'$; wie groß ist die Fläche des Sectors?
- 2) Wie groß ist der Winkel des Ausschnitts, dessen Inhalt $1^\circ 24' 62'' 66'''$ ist, wenn der Radius $6' 3''$ misst?
- 3) Wie groß ist der Radius des Kreises, worin für einen Winkel von $43^\circ 4'$ der Sector $6^\circ 16'' 13''' 72''''$ hält?
- 4) Wie groß ist das Segment, das durch die Seite eines regulären Sechsecks $= 4'$ im Kreise abgeschnitten wird? [§. 65.]
- 5) Wieviel beträgt die Fläche des Ringes, welchen zwey concentrische Kreise bilden, deren Radien $8'$ und $4' 3''$ sind?

VIII. A b s c h n i t t.

Von den Verhältnissen der Figuren.

§. 101.

Lehrsatz. Aehnliche Dreyecke verhalten sich, ihrem Flächeninhalte nach, wie die Quadrate zweyer gleichliegenden Seiten.

Beweis. (Fig. 99.)

Thes. $\triangle abc : \triangle ABC = bc^2 : BC^2$.

Daten. $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Man ziehe ihre Höhen, ad und AD , so ist:

$$\triangle abc : \triangle ABC = ad \cdot bc : AD \cdot BC \text{ [§. 70.]}$$

nun ist $ad : AD = bc : BC$ [§. 83.], folglich

$$ad \cdot \triangle abc : AD \cdot \triangle ABC = ad \cdot bc^2 : AD \cdot BC^2, \text{ oder}$$

$$\triangle abc : \triangle ABC = bc^2 : BC^2.$$

§. 102.

Lehrsatz. Aehnliche geradlinige Figuren verhalten sich wie die Quadrate zweyer gleichliegenden Seiten oder Diagonalen.

Beweis. (Fig. 100.)

Thes. $abcde : ABCDE = ab^2 : AB^2 = ac^2 : AC^2$.

Daten. $abcde \sim ABCDE$.

Man theile beyde Figuren durch gleichliegende Diagonalen in Dreyecke. Diese sind ähnlich [§. 84.].

Daher

$$\triangle abc : \triangle ABC = ac^2 : AC^2 = ab^2 : AB^2 \text{ [§. 101.]}$$

$$\triangle ace : \triangle ACE = ac^2 : AC^2 = ab^2 : AB^2 \text{ [§. 101. u. §. 84. Z.]} \text{ ,}$$

$$\triangle ced : \triangle CED = ce^2 : CE^2 = ab^2 : AB^2 \text{ „ „ folgl.}$$

$$\triangle abc + \triangle ace + \triangle ced : \triangle ABC + \triangle ACE + \triangle CED = 3ab^2 : 3AB^2, \text{ oder}$$

$$abcde : ABCDE = ab^2 : AB^2$$

$$\text{„ „ „} = ac^2 : AC^2.$$

I. Zusatz. Reguläre Figuren von gleicher Seiten-Zahl, verhalten sich wie die Quadrate der Radien oder Diameter der darum beschriebenen Kreise, denn in Fig. 101. ist:

$abcdef \sim ABCDEF$ [§. 75. Zus. I.]. Es ist also

$$abcdef : ABCDEF = ab^2 : AB^2 \text{ [Lehrs.]. Auch ist}$$

$$ab^2 : AB^2 = r^2 : R^2 = d^2 : D^2. \text{ [§. 85. Z. I.]}$$

$$\text{Mithin } abcdef : ABCDEF = r^2 : R^2 = d^2 : D^2.$$

II. Zusatz. Alle Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien oder Diameter [Z. I. u. §. 75. Z. II.]. Diesem gemäß ergibt sich, daß man, so wie die Quadrate §. 51., auch die Kreise verwandeln könne,

nur muß man statt der Quadrat-Seiten die Radien oder Diameter der Kreise nehmen.

§. 103.

Aufgabe. (Fig. 106.) Ein Rechteck AB zu quadriren, d. h. in ein, ihm gleiches, Quadrat verwandeln.

Auflösung. Man verlängere AC so, daß $CD = BC$ wird, beschreibe über AD einen Halbkreis und verlängere BC bis an die Peripherie; dann ist EC die Seite des verlangten Quadrates.

Beweis. *Thes.* $EC^2 = AC \cdot BC$. [§. 97. *Zus. I.*]

Dat. Es ist $AC : EC : CD$ [§. 80. *Zus. II.*]. Mithin $EC^2 = AC \cdot CD = AC \cdot BC$, weil $CD = BC$ ist.

I. Zusatz. Jede geradlinige Figur läßt sich quadriren. Denn man kann sie, nach §. 49. II. *Zus.*, in ein Dreyeck, und dieses nach §. 49. I. *Zus.*, in ein Rechteck verwandeln, welches letztere nach obiger Aufgabe quadriert werden kann.

II. Zusatz. Der Kreis läßt sich nicht quadriren; denn, da man die Peripherie aus dem Diameter nur durch Annäherung findet, so läßt sich auch kein, dem Kreise nach aller mathematischen Schärfe gleiches, Dreyeck, mithin auch kein solches Quadrat construiren.

§. 104.

Aufgabe. (Fig. 107.) Ein Parallelogramm nach einem bestimmten Verhältnisse zu theilen.

Auflösung und Beweis. Man theile eine Seite z. B. CD nach dem gegebenen Verhältnisse z. B. wie 1:2:3 [§. 74. 1.], so, daß

$$Cm : mn : nD = 1 : 2 : 3 \text{ ist.}$$

Durch die Theilungspuncte m und n ziehe man zur anliegenden Seite AC die Parallelen km und ln , so ist: $Am : kn : lD = Cm : mn : nD$ [§. 68. *Zus.*]

$$= 1 : 2 : 3.$$

Zusatz. Ist die zu theilende Figur ein Dreyeck, so theile man eine Seite desselben nach dem gegebenen Verhältnisse, und ziehe von den Theilungs-

Puncten nach der gegenüberstehenden Spitze des Drey-
eckes gerade Linien. [§. 68.]

§. 105.

Aufgabe. (Fig. 108.) Jede geradlinige Figur in ei-
ne gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung und Beweis. Man berechne die ganze
Figur [§. 98. *Zus.*], dividire den Inhalt durch die gege-
bene Anzahl der Theile, so erhält man die Grösse ei-
nes Theiles. Er sey M .

Nun suche man den Flächeninhalt des äussersten
Dreyeckes DEC , dann ist entweder

- 1) $\triangle DEC = M$, oder 2) $\triangle DEC < M$, oder
3) $\triangle DEC > M$.

Bey Nro. 1. ist das Dreyeck DEC ein verlangter
Theil der Figur.

Bey Nro. 2. subtrahire man den Inhalt des Drey-
eckes von M , nehme diesen Unterschied für den In-
halt eines Dreyeckes, dessen Grundlinie EC ist, und
suche die entsprechende Höhe [§. 97. *Zus. II.*]. Auf
 EC errichte man eine Senkrechte aE , gleich der ge-
fundenen Höhe. Durch a ziehe man $ac \parallel EC$ und
die Linien aC und cC . Es ist dann $\triangle aEC = \triangle EcC$
[§. 46. *Zus. II.*] und dem obigen Unterschiede gleich,
mithin auch $\triangle DEC + \triangle EcC = M$.

Bey nro. 3. subtrahire man M vom $\triangle DEC$ und
bestimme, wie bey nro. 2. die Dreyecke, nämlich
 $\triangle bEC = \triangle dEC$, dem gefundenen Unterschiede
gleich; dann ist $\triangle DEC - \triangle dEC = \triangle DdC = M$.

Auf ähnliche Art lassen sich die übrigen Theile
bestimmen.

Zusatz. Sollen die Theile der Figur in einem ge-
gebenen Verhältnisse stehen, so berechne man aus dem
ganzen Inhalte die treffenden Theile und construire
sie so, wie in obiger Aufgabe gezeigt wurde.

IX. Abschnitt.

Von der Lage gerader Linien gegen Ebenen, und der Ebenen unter sich,

§. 106.

Grundsätze.

1) Durch drey Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, ist die Lage einer Ebene bestimmt.

2) Eine gerade Linie, wovon zwey Punkte in einer Ebene liegen, liegt ganz in dieser.

3) Eine gerade Linie durchschneidet eine Ebene nur in einem Punkte, den man *Durchschnittspunct* nennt.

4) Durchschneiden sich zwey Ebenen, so haben sie eine Linie (*Durchschnittslinie*) gemein.

I. Zusatz. Durch einen geradlinigen Winkel, durch ein Dreyeck, oder durch zwey Parallelen ist die Lage einer Ebene bestimmt. [1.]

II. Zusatz. Die Durchschnittslinie zweyer Ebenen ist stets eine gerade; denn (Fig. 109.), man nehme zwey Punkte a und b , die beyde Ebenen gemein haben, und ziehe die gerade Linie ab , so liegt diese sowohl in der Ebene MN , als auch in der Ebene OP [2.], und ist der Durchschnitt beyder Ebenen [4.].

P o s t u l a t.

Man kann durch jede drey Punkte eine Ebene legen, und sie beliebig erweitern.

§. 107.

Erklärung. Eine gerade Linie steht auf einer Ebene *senkrecht*, wenn sie mit allen geraden Linien, die in der Ebene, vom Durchschnittspuncte aus an sie, gezogen werden können, rechte Winkel bildet.

I. Zusatz. (Fig. 109.) Eine gerade Linie de kann nicht auf zwey, sich schneidenden, Ebenen MN und OP zugleich senkrecht stehen. Denn, gesetzt sie stehe auf MN senkrecht, so ziehe man in der Ebene OP von d nach einen beliebigen Punct c der Durchschnittslinie, die gerade Linie dc , und in MN die

Linie ec , so ist $dec = R$. [Per hyp.], und folglich $edc < R$. [§. 26. Zus.]. Mithin kann ed nicht auf OP senkrecht stehen. [Erkl.]

II. Zusatz. Eine gerade Linie kann in einem Punkte nicht auf zwey Ebenen senkrecht stehen; denn, da dieser Punkt zu beyden Ebenen gehört, so schneiden sich diese, und die gerade Linie kann nicht auf zwey solchen Ebenen senkrecht stehen. [I. Zus.]

§. 108.

Lehrsatz. (Fig. 110.) Wenn eine gerade Linie auf eine Ebene so zu stehen kömmt, daß sie mit zwey, vom Durchschnittspuncte in der Ebene gezogenen, geraden Linien (die aber nicht in eine Verlängerung fallen) rechte Winkel bildet; so steht sie auf der Ebene senkrecht.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß die Linie ab , welche auf bc und bd senkrecht steht, auch auf jeder, beliebig in MN von b aus gezogenen, Linie z. B. auf be senkrecht steht. Daher

Thes. $abe = R$.

Daten. 1) $abc = R = abd$. Man verlängere bc und bd , so, daß

$bg = bc$, und

$bf = bd$ werde. Zieht man fg und cd , so ist auch $fbg = cbd$ [§. 10. Zus.], mithin

$\triangle fbg \cong \triangle cbd$ [§. 18.], und daher auch

$fg = dc$ [§. 18. Zus. II.]

$bgf = bcd$ „ „

2) Zieht man bh , als Verlängerung von be , so ist auch $bc = bg$

$bce = bgh$ [nro. 1.]

$cbe = gbh$ [§. 10. Zus.].

Daher $\triangle bce \cong \triangle bgh$ [§. 31.]; folglich auch

$be = bh$, und

$ce = gh$.

3) Man denke sich eine Ebene durch a , g und c gelegt, und ziehe darin ac und ag ; so ist:

$$ab = ab$$

$$bc = bg, \text{ und}$$

$$abc = abg = R \text{ [Dat. u. §. 9. Z. IV.]}$$

Daher $\triangle abc \cong \triangle abg$ [§. 18.]; folglich auch
 $ac = ag$.

4) Eben so lege man durch a, d und f eine Ebene, und ziehe darin ad und af ; so ist:

$$ab = ab$$

$$bd = bf, \text{ und}$$

$$abd = abf = R \text{ [Dat. u. §. 9. Zus. IV.]}$$

also $\triangle abd \cong \triangle abf$ [§. 18.], und
 $ad = af$.

5) In den Ebenen adc und afg ist:

$$ac = ag \text{ [nro. 3.]}$$

$$ad = af \text{ [nro. 4.], und}$$

$$cd = fg \text{ [nro. 1.]}$$

Mithin $\triangle acd \cong \triangle afg$ [§. 20.], und
 $acd = agf$.

6) In diesen Ebenen ziehe man ae und ah , so ist:

$$ce = gh \text{ [nro. 2.]}$$

$$ac = ag \text{ [nro. 3.], und}$$

$$ace = agh \text{ [nro. 5.]; folglich}$$

$$\triangle ace \cong \triangle agh \text{ [§. 18.], und}$$

$$ae = ah.$$

7) Man lege endlich durch a, h und e eine Ebene, so ist darin: $ab = ab$

$$be = bh \text{ [nro. 2.], und}$$

$$ae = ah \text{ [nro. 6.]; mithin}$$

$$\triangle abe \cong \triangle abh \text{ [§. 20.], und}$$

$$abe = abh = R. \text{ [§. 9. Zus. I.]}$$

I. Zusatz. Wenn eine gerade Linie auf drey andern, die in einem Punkte der erstern zusammenlaufen, senkrecht steht, so liegen die letztern in einer Ebene; denn sonst gäbe es, gegen §. 107. Zus. II., eine Senkrechte auf zwey oder mehreren Ebenen in einem Punkte.

II. Zusatz. Es gibt in einem Punkte auf einer

Ebene nur *eine* Senkrechte; denn wäre, ausser ab , auch bk auf MN senkrecht, so müßte, wenn man durch a, b, k eine Ebene abl legt, $kbl \equiv R \equiv abl$ seyn, welches unmöglich ist.

§. 109.

Lehrsatz. (Fig. 111.) Wenn von zwey Parallelen ab und cd , eine, z. B. ab , auf einer Ebene MN senkrecht steht, so steht auch die andere darauf senkrecht.

Beweis. Man ziehe bd , errichte in MN $de \equiv ab$ senkrecht auf bd , und ziehe be , und in der Ebene abd die Linie ad , so ist:

$$\text{Thes. } edc \equiv R \equiv bdc.$$

Daten. 1) $ab \parallel cd$, $abd \equiv R \equiv abe$ [§. 108.].

Dann ist $bd \equiv bd$

$$ab \equiv de$$

$$\text{und } abd \equiv bde \equiv R \text{ [Constr.].}$$

Mithin $\triangle abd \cong \triangle bde$ [§. 18.], und
 $ad \equiv be$.

2) Man lege durch a, b, e und durch a, d, e Ebenen. Diese schneiden sich in ae , und es ist:

$$ae \equiv ae$$

$$ab \equiv de$$

$$be \equiv ad \text{ [nro. 1.].} \text{ Daher}$$

$$\triangle abe \cong \triangle ade \text{ [§. 20.], und}$$

$$abe \equiv ade \equiv R \text{ [nro. 1.].}$$

3) Da nun $ade \equiv R \equiv bde$ [nro. 1. u. 2.] ist, so muß de auf der durch abd gelegten Ebene [§. 108.] mithin auch auf cd senkrecht stehen, und also $edc \equiv R$ seyn.

4) Da $ab \parallel cd$ ist,

so ist $abd \nmid bdc \equiv 2R$ [§. 34. III.].

Es ist aber $abd \equiv R$ [Dat.];

$$\text{also } bdc \equiv R.$$

Zusatz. Wenn zwey gerade Linien ab und cd auf einer Ebene MN senkrecht stehen, so sind sie parallel; denn sonst wäre, wenn man $df \parallel ab$ zöge, df

auf MN senkrecht [Lehrs.], welches nach §. 108. II. Zus. unmöglich ist, da cd auf MN senkrecht steht.

§. 110.

Aufgaben. (Fig. 112.) I) Aus einem Punkte a , ausser einer Ebene MN , auf diese eine Senkrechte zu fällen,

Auflösung. Man ziehe, in MN , bc beliebig, lege durch a , b und c eine Ebene, und fälle darin ad senkrecht auf bc . In MN , im Punkte d , errichte man de senkrecht auf bc , lege durch a , d , e eine Ebene, und fälle darin af senkrecht auf de ; dann ist af die verlangte Senkrechte.

Beweis. Man ziehe, durch f , $gh \parallel bc$, so ist:

Thes. $afg = R = afd$. [§. 108.]

Daten. 1) $gh \parallel bc$, da $adb = R = fdb$ [Constr.] ist, so ist bd senkrecht auf der Ebene adf [§. 108.], und, weil $gf \parallel bd$, auch gf darauf senkrecht [§. 109.], mithin $afg = R$.

2) Da af auf de senkrecht construirt wurde, so muß auch $afd = R$ seyn.

II) In einem Punkte i auf MN eine Senkrechte zu errichten.

Auflösung und Beweis. Man wähle ausser MN einen beliebigen Punkt a , fälle davon af auf MN senkrecht (I. Aufg.), lege durch a , f und i eine Ebene, und ziehe darin $ki \parallel af$; so ist ki die verlangte Senkrechte [§. 109.].

I. Zusatz. Von einem Punkte a , ausserhalb einer Ebene MN , gibt es auf diese nur eine Senkrechte, und diese ist die kürzeste Linie von a nach der Ebene. Denn zieht man al beliebig, so ist $alf < R$ [§. 26. Zus.], da $afl = R$ ist. Es steht also al nicht auf MN senkrecht. Auch ist jede Linie $al > af$ [§. 28. Z. II.]. Die Senkrechte von einem Punkte auf eine Ebene bestimmt also dessen Abstand von dieser.

II. Zusatz. In einem Punkte i auf einer Ebene MN gibt es nur eine Senkrechte ki ; denn, gesetzt

af stehe auf MN senkrecht, so müßte jede andere senkrechte Linie im parallel zu af seyn [§. 110. Zus.], und es gäbe dann durch einen Punct i zu af zwey Parallelen, gegen §. 35. I. Zus.

§. 111.

Lehrsatz. (Fig. 113.) Winkel, in verschiedenen Ebenen, sind gleich, wenn ihre Schenkel die, rücksichtlich der durch die Spitzen gezogenen geraden Linie, nach einer Seite zu liegen, parallel sind.

Beweis. *Thes.* $abc = ABC$.

Dat. $ab \parallel AB$, $bc \parallel BC$. Man mache auch $ab = AB$, $bc = BC$, und ziehe bB , aA , cC , ac und AC , so ist:

$aA \parallel bB$, und $cC \parallel bB$ [§. 43. Zus.]; mithin

$aA \parallel cC$, also auch $ac = AC$ [§. 43. Zus.]. Da

nun auch $ab = AB$, und

$bc = BC$ [*Dat.*] ist, so ist

auch $\triangle abc \cong \triangle ABC$ [§. 20.], und

$abc = ABC$.

§. 112.

Erklärungen. 1) Gerade Linien, die in allen Puncten gleich weit von einer Ebene abstehen [§. 110. Z. 1.], heissen mit dieser *parallel*.

2) Wenn man von einem beliebigen Puncte a (Fig. 112.) der Linie ad auf MN eine Senkrechte af fällt, und die Durchschnittspuncte d und f durch eine gerade Linie verbindet, so heißt der Winkel adf der *Neigungswinkel* der Linie ad gegen die Ebene MN .

3) Will man den Neigungswinkel zweyer sich schneidenden Ebenen, so errichte man (Fig. 109.) in einem beliebigen Puncte c der Durchschnittslinie ab , sowohl in der Ebene MN als in der Ebene OP , eine Senkrechte auf ab ; dann ist dce der *Neigungswinkel* beyder Ebenen. Man nennt die Ebene, worin dce liegt, die *Ebene des Neigungswinkels*.

I. Zusatz. (Fig. 109.) Ist der Neigungswinkel zweyer

Ebenen ein rechter, so stehen diese auf einander senkrecht. Denn, wenn $dce = R$ ist, so muß auch $dcf = R$ [§. 9. Zus. IV.] seyn, und es neigt sich die Ebene OP gegen MN auf keine Seite mehr, als auf die andere.

II. Zusatz. Wenn man durch eine Linie, die auf einer Ebene senkrecht steht, eine Ebene legt, so steht diese auf der ersteren Ebene senkrecht, denn ihr Neigungswinkel ist $= R$ [Zus. I.].

III. Zusatz. Die Durchschnittslinie zweyer Ebenen steht auf der Ebene des Neigungswinkels senkrecht [§. 108.].

IV. Zusatz. Die Ebene des Neigungswinkels zweyer Ebenen steht auf diesen beyden senkrecht; denn sie liegt in den Perpendickeln, die man von einem beliebigen Punkte jedes Schenkels des Neigungswinkels auf die andere Ebene fallen kann [Zus. II.].

§. 113.

Erklärung. Zwey Ebenen, die in allen Punkten gleichweit von einander abstehen [§. 110. Zus. I.], heissen *parallel*.

I. Zusatz. Parallele Ebenen schneiden sich, wenn man sie wie immer erweitert, nie [Erkl.].

II. Zusatz. Wenn eine gerade Linie auf zwey Ebenen zugleich senkrecht steht, so sind die Ebenen parallel; denn sie können sich nicht schneiden, sonst könnte die gerade Linie auf beyden Ebenen zugleich nicht senkrecht stehen [§. 107. Zus. I.].

III. Zusatz. (Fig. 114.) Wenn zwey parallele Ebenen, MN und OP , durch eine dritte QR geschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien, ab und cd , parallel; denn diese liegen beyde in QR , und, da ab stets in NM , und cd in OP , bleibt, so müssen sie überall gleichweit von einander abstehen, mithin parallel seyn [§. 32.], denn es ist $MN \nparallel OP$.

§. 114.

Aufgabe. (Fig. 113.) Durch einen Punkt b eine Parallelebene zu OP zu legen.

Auflösung. Man fälle, von b , bB senkrecht auf

OP [§. 110. I.]. Durch B ziehe man in OP zwey beliebige gerade Linien AB und BC , und durch b , in der Ebene bBA , zu BA die parallele ba , eben so, in der Ebene bBC , zu BC die parallele bc [§. 36.]. Die durch b , a und c gelegte Ebene MN ist dann parallel zu OP .

Beweis. Thes. $MN \parallel OP$.

Daten. Da $ab \parallel AB$ und $bBA = R$ ist, so muß auch $Bba = R$ [§. 34. III.] seyn. Eben so ist, da $bc \parallel BC$, und $bBC = R$ ist, auch $Bbc = R$ [§. 34. III.]. Es steht also bB auf MN senkrecht [§. 108.], und, da vermöge der Construction bB auch auf OP senkrecht steht, so muß $MN \parallel OP$ [§. 113. Zus. II.] seyn.

§. 115.

Lehrsatz. (Fig. 114.) Wenn zwey Parallelebenen durch eine Ebene geschnitten werden, so sind die Neigungswinkel der schneidenden Ebene gegen die Parallelebenen gleich.

Beweis. Es ist $MN \parallel OP$, folglich auch $ab \parallel cd$ [§. 113. Zus. III.]. Man fälle, in QR , fh senkrecht auf cd , so muß fh auch auf ab senkrecht stehen. Man verlängere fh über f , errichte kh in OP senkrecht auf cd , und lege durch f , k , h eine Ebene. Diese wird MN und OP in fi und kh schneiden.

Es ist aber $fi \parallel kh$ [§. 113. Zus. III.],

mithin $gfi = fhk$ [§. 34. II.], welche Winkel die, im Lehrsatze genannten, Neigungswinkel sind [§. 112. 3.].

§. 116.

Lehrsatz. (Fig. 114.) Wenn zwey Ebenen durch eine dritte in parallelen Linien geschnitten werden, und mit ihr, nach einer Seite zu, gleiche Neigungswinkel machen, so sind sie parallel.

Beweis. 1) Man fälle in QR von f auf cd die Senkrechte fh , und verlängere hf , so ist, da $ab \parallel cd$, der Winkel $bfg = R$ [§. 34. II.].

2) Man errichte, in MN , fi senkrecht auf ab , dann ist gfi der Ebene QR Neigungswinkel gegen

MN [§. 112. 3.], und dann bf auf der Ebene gfi senkrecht [§. 112. Zus. III.].

3) Die Ebene gfi schneidet, erweitert, OP in hk . Da auch hd , als parallel zu bf , auf der Ebene gfi senkrecht steht [§. 109.], so ist $dhk = R$, und fhk der Ebene QR Neigungswinkel gegen OP [§. 112. 3.].

4) Nach der Voraussetzung des Lehrsatzes ist $gfi = fhk$, mithin $fi \# hk$ [§. 35. II.], denn sie liegen beyde in der Ebene des Neigungswinkels.

5) Nun fälle man ik senkrecht auf kh , so ist ik auch auf fi senkrecht, oder $fik = R$.

6) Zieht man $il \# fb$, und $km \# hd$, so muß, da bf auf der Ebene des Neigungswinkels senkrecht steht [2.], auch tl und km darauf senkrecht stehen [§. 109.] und $lik = R = ikm$ seyn.

7) ik steht also senkrecht auf MN , da $fik = R = lik$ [5. 6.], und auch auf OP , indem $ikm = R = ikh$ [5. 6. und §. 108.] ist. Es muß also $MN \# OP$ [§. 113. Zus. II.] seyn.

Man fälle, in Q , die senkrechte Qd auf OP , so muß Qd auch auf MN senkrecht stehen. Man verlängere Qd über d in h , so ist Qdh der Neigungswinkel der Ebene QR gegen OP , und $Qdh = fhk$. Da $gfi = fhk$, so ist $gfi = Qdh$. Man fälle nun $il \# fb$, und $km \# hd$, so ist $lik = ikm$. Da $lik = Qdh$, so ist $ikm = Qdh$. Also steht ik senkrecht auf OP und MN .

Es ist aber $ik \# MN$ [§. 113. Zus. II.]. Mithin $gfi = fhk$ [§. 35. II.], welches Winkel die im Lehrsatz genannten Neigungswinkel sind [§. 112. 3.].

§. 110. Lehrsatz (Fig. 114.) Wenn zwey Ebenen durch eine dritte in parallelen Linien geschnitten werden, und mit ihr nach einer Seite zu, gleiche Neigungswinkel machen, so sind sie parallel.

Beweis. 1) Man fälle in Q die senkrechte Qd auf OP , und verlängere Qd über d in h , so ist Qdh der Neigungswinkel der Ebene QR gegen OP , und $Qdh = fhk$. Da $gfi = fhk$, so ist $gfi = Qdh$. Man fälle nun $il \# fb$, und $km \# hd$, so ist $lik = ikm$. Da $lik = Qdh$, so ist $ikm = Qdh$. Also steht ik senkrecht auf OP und MN .

2) Man errichte, in M , die senkrechte Ml auf MN , dann ist gfi der Neigungswinkel der Ebene gfi gegen MN , und $gfi = Mli$. Da $gfi = Qdh$, so ist $Mli = Qdh$. Also steht il senkrecht auf OP und MN .

II. T h e i l.

Von den geometrischen Körpern.

I. A b s c h n i t t.

Erklärung der geometrischen Körper.

§. 117.

Erklärung. Die Neigung wenigstens ~~dreyer~~ Ebenen, welche einen Punct miteinander gemein haben, heißt ein *körperlicher Winkel* oder eine *körperliche Ecke*.

I. Zusatz. Die Summe aller Flächenwinkel der sich neigenden Ebenen muß bey jedem körperlichen Winkel kleiner als 360° seyn. Denn hielten diese Winkel zusammen 360° , so lägen sie in einer Ebene [§. 92. Zus. I.]; da sie nun eine Ecke, d. i. eine Höhlung bilden sollen, so muß ihre Summe kleiner als 360° seyn.

II. Zusatz. Zwey körperliche Winkel sind congruent, wenn die einzelnen Flächenwinkel und die Neigungen jeder zwey Ebenen gegeneinander der Ordnung nach gleich sind; denn, da in diesem Falle die einzelnen Flächenwinkel sich der Ordnung nach decken, auch jede zwey Ebenen dieser Flächenwinkel der Ordnung nach zusammen fallen, so müssen beyde körperlichen Winkel vollkommen ineinanderpassen.

§. 118.

Erklärungen. 1) Ein *geometrischer Körper* ist ein von allen Seiten begrenzter Raum. (§. 1.) Die Wissenschaft, welche sich mit den Eigenschaften der geometrischen Körper beschäftigt, heißt *Sterometrie*.

2) Ein *geometrischer Körper* heißt *regulär*, wenn alle begrenzenden Flächen reguläre, congruente, ebe-

ne Figuren, und alle körperlichen Winkel congruent sind. Es gibt deren fünf, nämlich:

- a) das *Tetraëdron* (Fig. 115.), durch vier,
- b) das *Octaëdron* (Fig. 116.), durch acht,
- c) das *Ikosaëdron* (Fig. 117.), durch zwanzig reguläre und gleiche Dreyecke,
- d) das *Hexaëdron* (*Cubus* oder *Würfel*) (Fig. 118.), durch sechs gleiche Quadrate,
- e) das *Dodekaëdron* (Fig. 119.), durch zwölf gleiche reguläre Fünfecke begrenzt.

I. Zusatz. Wenigstens vier Ebenen gehören dazu, um einen geometrischen Körper zu bilden.

II. Zusatz. Ein Winkel eines regulären Dreyeckes hält 60° [§. 38. Zus. IV.], mithin ist die Summe dreier solcher Winkel, welche eine Ecke des Tetraëdron bilden, 180° ; bey dem Octaëdron geben deren vier die körperliche Ecke, sie sind zusammen 240° ; fünf solche Winkel, durch welche die Ecke des Ikosaëdron gebildet wird, geben 300° : da nun sechs, oder noch mehrere solche Winkel, 360° und darüber ausmachen, so gibt es hier keine körperliche Ecke [§. 117. Zus. I.], mithin auch, ausser den drey angeführten, keinen andern regulären Körper, dessen Grenzen reguläre Dreyecke sind. — Sind die begrenzenden Seitenflächen Quadrate, so gibt es nur einen regulären Körper, das Hexaëdron; denn, da ein Winkel des Quadrats 90° hält, so sind alle drey, welche die Ecke dieses Körpers bilden, 270° ; vier solche Winkel gäben schon 360° , schliessen also keine körperliche Ecke ein. — Von gleichen regulären Fünfecken wird das einzige Dodekaëdron begrenzt; denn ein Winkel des regulären Fünfeckes hält 108° , also drey solche bey einer Ecke dieses Körpers 324° : da nun vier solche Winkel, und bey allen übrigen Vielecken schon drey entweder 360° oder noch mehr Grade ausmachen, so schliessen sie keine körperliche Ecke ein. Es gibt demnach, ausser den angeführten, keinen regulären Körper.

§. 119.

Lehrsatz. Körper, welche der Ordnung nach congruente körperliche Winkel und gleichviele ähnliche Seitenflächen haben, sind *ähnlich*.

Beweis. Die Qualität eines Körpers ist durch die Anzahl, Beschaffenheit und Lage der begrenzenden Flächen bestimmt; ist dieses alles in beyden Körpern einerley, so haben sie einerley Qualität (Form), sind also *ähnlich*.

I. Zusatz. In ähnlichen Körpern sind ähnlichliegende Linien einander proportionirt, denn das Verhältniß solcher Linien gehört zur Qualität, die in ähnlichen Körpern einerley ist.

II. Zusatz. Körper von gleichviel congruenten Seitenflächen und Ecken passen ineinander, sind also *congruent*.

§. 120.

Erklärung. Die vorzüglichsten einfachen geometrischen Körper sind im Allgemeinen:

- I. das *Prisma*,
- II. die *Pyramide*, und
- III. die *Kugel*.

§. 121.

Erklärung. 1) *Prisma* (Fig. 120.) heißt jener geometrische Körper, dessen zwey gegenüberstehende parallele Flächen (*Grundflächen*) congruente geradlinige Figuren, und dessen übrige Flächen (*Seitenflächen*) so viele Parallelogramme sind, als eine der Grundflächen Seiten hat. Man nennt die Prismen nach der Anzahl der Seiten der Grundfläche, *dreyseitig*, *vierseitig* etc. Stehen die Seitenflächen eines Prisma auf der Grundfläche senkrecht, so heißt es ein *senkrecht*es, übrigens *schief*. Die Senkrechte von einem Punkte der einen Grundfläche auf die andere heißt die *Höhe*, und jede Durchschnittslinie zweyer Seitenflächen die *Kante* des Prisma.

2) Ist die Grundfläche des Prisma ein Kreis, so heißt es *Cylinder* (Walze) (Fig. 121.). Die gerade Linie *AB*, welche die Mittelpunkte der beyden Kreise

verbindet, heißt *Achse* des Cylinders. Steht diese auf der Grundfläche senkrecht, so heißt der Cylinder *senkrecht*, übrigens *schief*.

3) Jedes vierseitige Prisma, bey welchem die gegenüberstehenden Seitenflächen je zwey und zwey parallel laufen, heißt ein *Parallelepipedon*. (Fig. 122.) Dieses heißt *rechtwinklig*, wenn alle seine begrenzenden Flächen Rechtecke sind.

I. Zusatz. (Fig. 120.) Wenn man ein Prisma parallel zur Grundfläche durch eine Ebene schneidet, so ist die Durchschnichtsfigur stets mit der Grundfläche congruent, d. i. wenn $\triangle def \# \triangle DEF$ ist, so muß $\triangle def \cong \triangle DEF$ seyn. Denn, da $\triangle def \# \triangle DEF$ ist, so muß $df \# DF$, $fe \# FE$, und $de \# DE$ [§. 113. *Zus. III.*], mithin $dfe = DFE$, $fed = FED$, und $edf = EDF$ [§. 111.] seyn. Auch ist $df = DF$, $fe = FE$, und $ed = ED$ [§. 42.]. Mithin $\triangle def \cong \triangle DEF$. Auf dieselbe Art wird der Beweis für jedes mehrseitige Prisma geführt.

II. Zusatz. Die Durchschnichtsfigur eines, parallel zur Grundfläche geschnittenen, senkrechten Cylinders ist ein Kreis und mit dem der Grundfläche congruent [Zus. I.].

§. 122.

Erklärung. (Fig. 123. u. 125) 1) *Pyramide* heißt jener geometrische Körper, dessen Grundfläche eine ebene geradlinige Figur, und dessen Seitenflächen so viele ebene geradlinige Dreyecke sind, als die Grundfläche Seiten hat, die aber alle in einem Punkte *A* (*Spitze*) zusammenstossen. Die Pyramide heißt nach der Anzahl der Seiten der Grundfläche *dreyseitig*, *vierseitig* etc., und der senkrechte Abstand *AE* der Spitze von der Grundfläche die *Höhe* derselben. Das Stück *bdcBDC* der Pyramide, welches übrig bleibt, wenn man durch eine Ebene, parallel zur Grundfläche, das obere Stück *Abdc* abschneidet, heißt eine *abgekürzte Pyramide* (*Pyramis decurtata*).

2) Ist die Grundfläche einer Pyramide ein Kreis, so heißt sie ein *Kegel* (*Conus*) (Fig. 124.). Die Linie

AD , von der Spitze bis an den Mittelpunkt der Grundfläche, ist seine *Achse*. Steht diese auf der Grundfläche senkrecht, so heißt auch der Kegel *senkrecht*, übrigens *schief*. Die gerade Linie AB , von der Spitze bis an einen Punct der Peripherie der Grundfläche, heißt die *Seite* des Kegels. Das übrigbleibende Stück $bcBC$ des Kegels, wenn man durch eine Ebene, parallel zur Grundfläche, das obere Stück abschneidet, ist ein *abgekürzter Kegel* (*Conus decurtatus*).

I. Zusatz. Wenn man eine Pyramide durch eine Ebene parallel zur Grundfläche schneidet, so ist die Durchschnichtsfigur jedes Mal mit der Grundfläche *ähnlich*, d. i. wenn (Fig. 125.) $bd \parallel BD$ ist, so muß $bd \propto BD$ seyn. Denn, da $bd \parallel BD$ ist, so muß $bc \parallel BC$, $cd \parallel CD$, $de \parallel DE$, $eb \parallel EB$ [§. 113. Zus. III.], mithin $bcd = BCD$, $cde = CDE$, $deb = DEB$ und $ebc = EBC$ [§. 111.] seyn. Auch ist:

$$\left. \begin{array}{l} bc : BC = Ac : AC \\ cd : CD = Ac : AC \end{array} \right\} \text{ [§. 71.]}$$

folglich $bc : BC = cd : CD$. Aus demselben Grunde ist auch:

$$cd : CD = de : DE = eb : EB.$$

Mithin $bd \propto BD$ [§. 75.].

II. Zusatz. Die zur Grundfläche parallele Durchschnichtsfigur eines Kegels ist ein Kreis [Zus. I.].

§. 123.

Erklärung. (Fig. 126.) Die *Kugel* (*Sphaera*, *globus*) ist jener geometrische Körper, dessen krumme Oberfläche so beschaffen ist, daß jeder Punct derselben von einem Puncte innerhalb (*Mittelpunct*) gleichweit absteht. Dieser, überall gleiche, Abstand AC , FC etc. der Kugeloberfläche vom Mittelpuncte C heißt der *Radius* der Kugel. Eine gerade Linie zwischen zwey Puncten der Oberfläche heißt eine *Sehne*, und wenn sie durch den Mittelpunct der Kugel geht, ein *Durchmesser* derselben.

I. Zusatz. Alle Radien und Durchmesser dersel-

ben Kugel sind gleich; und alle Kugeln mit gleichen Radien oder Durchmessern sind congruent.

II. Zusatz. Wenn eine Kugel durch eine Ebene geschnitten wird, so ist die Durchschnitsfigur jedes Mahl ein Kreis (*Kugelkreis* genannt). Denn, man fälle vom Mittelpuncte der Kugel auf die Durchschnits-Ebene die Senkrechte CH , so steht diese auf jeder geraden Linie HG , HI , etc., welche von H in jener Ebene gezogen wird, senkrecht [§. 107.]. In der äussern Begrenzung dieser Fläche nehme man beliebig zwey oder mehrere Punkte z. B. G und I an, und ziehe HG und HI , so wie auch CG und CI , welche Radien der Kugel und $= r$ sind. Da $CHG = R = CHI$ ist, so ist nach §. 80. *Zus. III.*

$$HG = \sqrt{CG^2 - HC^2} = \sqrt{r^2 - HC^2}.$$

$$\text{Ebenso: } HI = \sqrt{CI^2 - HC^2} = \sqrt{r^2 - HC^2}.$$

$$\text{Mithin } HG = HI.$$

Auf gleiche Art kann man zeigen, dass alle geraden Linien, aus H nach der Begrenzung der Durchschnitsebene FGI gezogen, einander gleich sind; folglich ist FGI ein Kreis, und H dessen Mittelpunct.

Da r , als Radius der Kugel, eine beständige Grösse ist, so wird $\sqrt{r^2 - HC^2}$ um so grösser, je kleiner HC wird, und umgekehrt um so kleiner je grösser HC ist. Hieraus folgt, dass jede, durch den Mittelpunct der Kugel gelegte, und von der Oberfläche derselben begrenzte, Ebene ein *grösster Kugelkreis* ist, die übrigen Durchschnitte aber um so kleiner sind, je entfernter H vom Mittelpuncte der Kugel ist; und dass ferner alle grössten Kreise, deren Mittelpunct der Mittelpunct der Kugel ist, und alle kleineren von diesem Mittelpuncte gleichweit abstehenden Kreise einander gleich sind.

§. 124.

Erklärungen. (Fig. 126.) 1) Zwey Punkte, D und E , an der Oberfläche der Kugel, deren jeder von allen Punkten der Peripherie eines Kugelkreises $FLGI$ gleichweit absteht, heissen die *Pole* dieses Kugelkrei-

ses, so wie die gerade Linie DE , zwischen den Polen, die *Achse* derselben.

2) Verschiedene Kugelkreise, deren Ebenen einander parallel sind, heißen *Parallelkreise*, z. B. $FLGI$ und $AMBK$.

3) Jedes Stück der Oberfläche der Kugel, welches zwischen zwey Parallelkreisen liegt, heißt eine *Zone*, z. B. $FLGIAMBK$.

4) Jede Kugelkreisfläche zerlegt die Kugel in zwey Stücke, welche *Kugel - Abschnitte* (*Segmente*) heißen, z. B. $DFLGI$ oder $EFLGI$.

5) Der Theil der Kugel, der zwischen den Ebenen der Parallelkreise liegt, heißt eine *körperliche Zone*, z. B. $FLGIAMBK$.

6) *Kugel - Ausschnitt* (*Sector*) ist jener kegelförmige Theil der Kugel, dessen Grundfläche die Oberfläche eines Kugelabschnitts, und dessen Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist, z. B. $DFLGIC$.

7) *Keilförmiger Kugel - Ausschnitt* (Fig. 126. a) heißt jener Theil der Kugel der zwischen zwey größten Halbkreisen, ADB und AEB , liegt.

§. 125.

Erklärungen 1) Das *Prisma* entsteht durch die Spuren der Bewegung der Grundfläche nach der Höhe oder Tiefe, jedoch unter steter Beybehaltung der parallelen Richtung mit ihrer vorigen Lage [§. 2.]. Auf dieselbe Art entsteht durch die Bewegung einer Kreisfläche der *Cylinder*. Dieser wird auch durch die Umdrehung eines Rechteckes um eine seiner Seiten erzeugt.

2) Nimmt eine ebene Figur während der Bewegung nach der Höhe oder Tiefe, unter Beybehaltung der parallelen Richtung zur vorigen Lage, progressiv ab, bis sie $= 0$ wird, so bilden die Spuren der Bewegung eine *Pyramide* [§. 2.]. Ist die bewegte Fläche ein Kreis, so entsteht der *Kegel*. Dieser wird auch durch die Umdrehung eines rechtwinkligen Dreyeckes um eine Cathete erzeugt.

3) Bewegt man eine halbe Kreisfläche um den Diameter so lange, bis sie wieder in ihre vorige Lage zu stehen kommt, so entsteht die Kugel.

II. A b s c h n i t t.

Berechnung der Oberflächen der vorzüglichsten geometrischen Körper.

§. 126.

Erklärung. Die in einer Ebene ausgebreitete Oberfläche eines Körpers heißt dessen *Netz*. So sind Fig. 127. 128. 129. 130. und 131. die Netze für das Tetraëdon, Ocaëdron, Ikosaëdron, Hexaëdron und Dodekaëdron.

Zusatz. Man findet die Oberfläche eines jeden regulären Körpers, wenn man eine seiner begrenzenden Flächen berechnet, und den gefundenen Werth durch die Zahl dieser Flächen multiplicirt.

§. 127.

Aufgabe. Die Oberfläche eines jeden Prisma zu finden.

Auflösung. Man berechne eine der Grundflächen, nehme den gefundenen Werth doppelt und addire dazu die Summe der Seitenflächen, die man beym senkrechten Prisma durch das Product aus dem Perimeter der Grundfläche in die Höhe des Prisma erhält. Durch die Anschauung des in Fig. 132. dargestellten Netzes eines vierseitigen Prisma wird obiges klar. Ist das Prisma schief, so muß man seine Seitenflächen (Parallelogramme) besonders berechnen.

Zusatz. (Fig. 133.) Da beym senkrechten Cylinder die Grundfläche ein Kreis, folglich $= r^2\pi$, und die krumme Seitenfläche ein Rechteck aus der Peripherie der Grundfläche $2r\pi$ und der Höhe des Prisma h ist, so ist die Oberfläche des Cylinders oder

$$S = 2r^2\pi + 2r\pi h = 2r\pi [r + h].$$

Für den Fall, daß $h = 2r$ ist, wird $S = 6r^2\pi$.

§. 128.

Aufgabe. Die Oberfläche einer jeden Pyramide zu berechnen.

Auflösung. Man berechne die Grundfläche und addire dazu die Summe aller Seitenflächen (Dreyecke). Ist die Pyramide gleichseitig, so findet man ihre ganze Seitenfläche, wenn man den halben Perimeter der Grundfläche mit der Höhe eines Seitendreyeckes multiplicirt [§. 46. *Zus. III.*]. Fig. 134. stellt das Netz einer solchen Pyramide dar. Ist die Pyramide schief, so muß man jede Seitenfläche als Dreyeck besonders berechnen.

Zusatz. Beym senkrechten Kegel [§. 122. 2.], dessen Netz Fig. 135. darstellt, ist die Grundfläche $r^2\pi$, und die krumme Seitenfläche einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinie der Umfang der Grundfläche $2r\pi$ und dessen Höhe die Seite des Kegels a ist [§. 46. *Zus. III.*]. Daher die ganze Oberfläche oder

$$S = r^2\pi + r\pi a = r\pi[r + a].$$

Ist bey einem solchen Kegel bloß der Radius der Grundfläche r und die Höhe h gegeben, so kann man daraus a finden, nämlich es ist (Fig. 124.):

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} \text{ [§. 80. *Zus. III.*]}$$

$$\text{oder } a = \sqrt{h^2 + r^2}. \text{ Mithin}$$

$$\text{auch } S = r\pi[r + \sqrt{h^2 + r^2}].$$

Für den Fall, daß $h = 2r$ ist, wird

$$S = r^2\pi[1 + \sqrt{5}].$$

§. 129.

Aufgabe. Die Oberfläche einer abgekürzten Pyramide zu finden.

Auflösung. Man berechne die beyden parallelen ebenen Figuren, addire dazu die Summe der Seitenflächen (Trapeze), die man bey der gleichseitigen abgekürzten Pyramide erhält, indem man die halbe Summe der Perimeter der untern und obern Grundfläche mit der Höhe eines Trapezes multiplicirt. — Denn mehrere Trapeze von gleichen Höhen sind zusammen einem Trapeze von derselben Höhe gleich, dessen Grundlinie die Summe der Grundlinien der ein-

zeln, und dessen obere Parallele der Summe der oberen Parallelen der einzelnen Trapeze gleich ist. Ist die abgekürzte Pyramide schief, so muß man die einzelnen Seiten - Trapeze besonders berechnen. Fig. 136. ist das Netz einer senkrechten abgekürzten Pyramide.

I. Zusatz. Sind R und r die Radien der beyden Kreise und $a = bB$ (Fig. 124.) die schiefe Seite eines senkrechten abgekürzten Kegels, so ist obiger Auflösung gemäß dessen krumme Seitenfläche

$$\begin{aligned} &= [2R\pi + 2r\pi] \frac{a}{2} \\ &= [R + r] a\pi^*) \end{aligned}$$

Addirt man dazu die beyden Kreisflächen $R^2\pi$ und $r^2\pi$, so ist die ganze Oberfläche oder

$$\begin{aligned} S &= R^2\pi + r^2\pi + a\pi[R + r] \\ &= \pi[R^2 + r^2 + a[R + r]]. \end{aligned}$$

Fig. 137. ist ein Netz eines senkrechten abgekürzten Kegels.

II. Zusatz. (Fig. 124.) Bezeichnet $Dd = h$ die Höhe des abgekürzten Kegels, und fällt man, in der Ebene ABC , die Linie bE senkrecht auf BC ; so ist $bE = Dd = h$, und

$$\begin{aligned} bB^2 &= bE^2 + BE^2 [\S. 80. \text{Zus. III.}], \text{ oder} \\ a^2 &= h^2 + [R - r]^2, \text{ und} \\ a &= \sqrt{h^2 + [R - r]^2}. \end{aligned}$$

Mithin ist die Oberfläche eines abgekürzten Kegels, durch R , r und h ausgedrückt, oder

$$S = \pi[R^2 + r^2 + [R + r]\sqrt{h^2 + [R - r]^2}] [\text{Zus. I.}].$$

III. Zusatz. (Fig. 124.) Halbirt man Bb in m , und zieht man $mn \parallel BC$, so ist $mn = R + r$ [$\S. 73.$], und die krumme Seitenfläche des abgekürzten Kegels

$$\begin{aligned} &= [R + r] a\pi = mn \cdot a \cdot \pi [\text{Zus. I.}] \\ &= 2 \cdot mo \cdot a \cdot \pi, \text{ d. h.} \end{aligned}$$

*) Dieselbe Formel erhält man, wenn man die krumme Seitenfläche des ganzen Kegels, und dann die des oben abgeschnittenen Stückes desselben berechnet, und diesen Werth von jenem subtrahirt.

die krumme Seitenfläche des senkrechten abgekürzten Kegels ist der eines Cylinders von derselben Höhe gleich, der aber zur Grundfläche einen Kreis hat, dessen Radius dem arithmetischen Mittel zwischen den beyden Radien der Grundflächen des Kegels gleicht [§. 127. Zus.].

§. 130.

Lehrsatz. Wenn eine Kugel einen abgekürzten Kegel von innen so berührt, daß die Berührungsebene die Höhe des abgekürzten Kegels halbt; so ist die krumme Seitenfläche dieses abgekürzten Kegels der eines Cylinders gleich, dessen Grundfläche der größte Kugelkreis der Kugel, und dessen Höhe die Höhe des abgekürzten Kegels ist.

Beweis. (Fig. 138.) Es sey $OL = 2r$ die Achse der Kugel und der Kreis um M ein größter Kugelkreis. Man ziehe durch den Punct A dieses Kreises die Tangente BC , mache $AB = AC$, und fälle BH und CI senkrecht auf OL . Dreht man die Fläche $CBHI$, so wie auch die Kreisfläche um OL , so beschreibt jene einen abgekürzten senkrechten Kegel, dessen Höhe $HI = h$ ist, und diese eine Kugel, welche den abgekürzten Kegel von innen so berührt, daß die Berührungsebene die Höhe des abgekürzten Kegels in k halbt. Dem Lehrsatze gemäß soll die krumme Seitenfläche dieses abgekürzten Kegels der eines Cylinders gleich seyn, der dieselbe Höhe h , aber den größten Kugelkreis der Kugel zur Grundfläche hat. Nun ist die krumme Seitenfläche des abgekürzten Kegels $= [BH + CI] CB \pi$ [§. 129. Zus. I.], und die des Cylinders $= 2r \pi h$ [§. 127. Zus.]. Daher

$$\text{Thes. } [BH + CI] CB \pi = 2r \pi h.$$

Daten. Es ist $AB = AC$, und $DE = EF$, folglich, wenn man AE zieht, $AE = \frac{1}{2} [BD + CF]$ (§. 73.) $= BH + CI$.

Man fälle von B auf CF die Senkrechte $BN = HI = h$, ziehe dann den Diameter AG und die Linie EG ; so ist $AEG = R = AKM$ [§. 58. Zus. III.], folglich $KM \parallel EG$ [§. 35. II.].

Auch ist: $m = o$ [§. 34. II.], also auch
 $= n$ [§. 59.] und
 $= x$ [§. 34. II.], da nun
auch $BNC = AKM = R$ ist, so muß

$\triangle BCN \sim \triangle AKM$ [§. 76.] seyn,

daher $BC : BN = AM : AK$, und, da

auch $AM : AK = AG : AE$ [§. 71.] ist,

so muß $BC : BN = AG : AE$, oder

$BC : h = 2r : [BH + CI]$, und

daher $[BH + CI] BC = 2r h$, folglich auch

$[BH + CI] BC \pi = 2r \pi h$ seyn.

Zusatz. Jede Zone [§. 124. 3.], deren Höhe unendlich klein ist, ist der krummen Seitenfläche eines Cylinders von derselben Höhe gleich, dessen Grundfläche der größte Kugelkreis der Kugel ist. (Fig. 138.) Denn, je kleiner HI wird, desto näher rückt die Tangente BC dem Bogen PQ . Wird HI unendlich klein, so fällt die Tangente BC mit dem unendlich kleinen Bogen PQ zusammen, und es ist die krumme Fläche der, durch die Umdrehung des unendlich kleinen Bogens entstandenen, unendlich kleinen Zone gleich der krummen Seitenfläche des, durch die Umdrehung der unendlich kleinen Tangente beschriebenen, abgekürzten Kegels. Dieses gilt von jeder andern Zone, deren Höhe unendlich klein ist. Es gleicht also eine solche Zone auch der krummen Seitenfläche eines Cylinders, dessen Grundfläche der größte Kugelkreis, und dessen Höhe ebenfalls unendlich klein ist [Lehrs.].

§. 131.

Aufgabe. Eine Zone, die krumme Oberfläche eines Kugelabschnitts, so wie die der ganzen Kugel zu berechnen.

Auflösung und Beweis. 1) Um eine Zone zu berechnen multiplicire man den größten Kugelkreis der Kugel durch die Höhe der Zone, d. i. (Fig. 139.)

Zone $ABCD = 2r \pi h$, wenn r der Radius der Kugel und $h = FG$ die Höhe der Zone ist. Denn

man denke sich die Zone durch unendlich nahe liegende Parallelkreise in unendlich viele kleinere Zonen, deren Höhen unendlich klein sind, getheilt. Jede davon gleicht der krummen Seitenfläche eines Cylinders von derselben Höhe, dessen Grundfläche der größte Kugelkreis der Kugel ist [§. 130. Zus.]. Es ist also, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. die Höhen dieser unendlich kleinen Zonen sind,

$$\text{die erste derselben} = 2 r \pi \alpha$$

$$\text{die zweyte} \quad \quad \quad = 2 r \pi \beta$$

$$\text{die dritte} \quad \quad \quad = 2 r \pi \gamma \text{ etc.}$$

$$\text{Mithin die ganze Zone } ABCD = 2 r \pi [\alpha + \beta + \gamma + \dots] \\ = 2 r \pi h, \text{ weil}$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots = h \text{ ist.}$$

2) Geht GF in GE über, so wird aus der Zone die krumme Oberfläche des Kugelabschnitts, daher auch diese $= 2 r \pi h$, wenn r der Radius der Kugel und $h = EG$ die Höhe der Zone ist [1.].

3) Setzt man $h = r$, so entsteht für die Oberfläche der Halbkugel $2 r^2 \pi$ [2.], mithin ist die Oberfläche der ganzen Kugel $= 4 r^2 \pi$, d. h. die Oberfläche einer jeden Kugel ist ihrer vierfachen größten Kugelkreisfläche gleich.

I. Zusatz. Die krummen Oberflächen verschiedener Zonen und Kugelabschnitte sind gleich, wenn sie gleiche Höhen haben; im Gegentheile verhalten sie sich gegeneinander, wie ihre Höhen [1. und 2.].

II. Zusatz. Die Oberflächen zweyer oder mehrerer Kugeln von verschiedenen Radien verhalten sich wie die Quadrate dieser Radien, nämlich wie

$$4 R^2 \pi : 4 r^2 \pi = R^2 : r^2.$$

III. Zusatz. (Fig. 140.) Die Oberfläche der Kugel verhält sich zur ganzen Oberfläche des darumbeschriebenen Cylinders $ABCD$ (dessen Radius der Grundfläche $= r$ und dessen Höhe $= 2 r$ ist), wie

$$4 r^2 \pi : 6 r^2 \pi = 4 : 6 = 2 : 3 \text{ [§. 127. Zus.]}$$

IV. Zusatz. (Fig. 126.) Da in der Ebene $FDGE$ des größten Kugelkreises

$$DG^2 = DE \cdot DH \text{ [§. 80. Zus. I.]}$$

$$= 2r \cdot h \text{ ist, so ist auch}$$

$$DG^2 \pi = 2r \pi h \text{ d. h.}$$

der Kreis, dessen Radius die Sehne der Kugel vom Pole des Abschnittes bis an einen Punct der Peripherie desselben ist, gleicht der krummen Oberfläche dieses Kugelabschnitts.

V. Zusatz. (Fig. 126. a.) Die krumme Oberfläche des keilförmigen Kugelausschnittes *ADBE* [§. 124. 7.] ist, wenn *r* der Radius der Kugel und α der Neigungswinkel der in der Achse der Kugel sich schneidenden Ebenen ist, $4r^2 \pi \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$; denn es ist, wenn *S* die krumme Oberfläche des Ausschnittes und *M* die der Kugel ausdrückt, $M : S = 360^\circ : \alpha^\circ$, daher $S = M \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = 4r^2 \pi \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$.

VI. Zusatz. Aus dem Bisherigen in Vergleichung mit §. 102. ergibt sich, daß sich die Oberflächen ähnlicher Körper wie die Quadrate zweyer gleichliegenden Seiten oder Dimensionen verhalten [§. 119.].

§. 132.

Aufgabe. (Fig. 140.) Man soll das Verhältniß der Oberfläche der Kugel zur ganzen Oberfläche des in der Kugel und des um dieselbe beschriebenen gleichseitigen Kegels *HIK* und *EFG* bestimmen.

Auflösung. 1) Ist *HIK* der, in der Kugel beschriebene gleichseitige Kegel, d. h. ist $HI = HK = IK = p$, und $IN = r$, so ist

$$IK = p = r\sqrt{3} \text{ [§. 86. Zus. II. u. §. 65.].}$$

Es ist also die ganze Oberfläche des Kegels *HIK* oder $k = \frac{1}{2} p \pi [\frac{1}{2} p \div p]$ [§. 128. Zus.]

$= \frac{3}{4} p^2 \pi = \frac{3}{4} r^2 \pi$. Diese mit der Oberfläche der Kugel $4r^2 \pi$ verglichen, gibt, wenn *M* die Oberfläche der Kugel ausdrückt,

$M : k = 4r^2 \pi : \frac{3}{4} r^2 \pi = 16 : 9$. d. h. die Oberfläche der Kugel verhält sich zur ganzen Oberfläche des, in ihr beschriebenen, gleichseitigen Kegels, wie 16 : 9.

2) Für den, um die Kugel construirten gleichseitigen Kegel EFG ist $EF = EG = FG = q$, und $IN = r$.

Da $IK \nparallel FG$ ist, so muß

$$IK : FG = NL : NM. [\S. 83.]$$

$$\text{oder } p : q = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}p^2} : r.$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - p^2} : r; \text{ folglich}$$

$$q = \frac{2rp}{\sqrt{4r^2 - p^2}} = \frac{2rp\sqrt{4r^2 - p^2}}{4r^2 - p^2}, \text{ und, da}$$

$$p = r\sqrt{3} \text{ ist,}$$

$$q = \frac{2r^3\sqrt{3}}{r^2} = 2r\sqrt{3} \text{ seyn.}$$

3) Es ist also die ganze Oberfläche des, um die Kugel beschriebenen gleichseitigen Kegels EFG oder

$$K = \frac{1}{2} q \pi \left[\frac{1}{2} q + q \right] = \frac{3}{4} q^2 \pi [\S. 128. \text{Zus.}]$$

$$= 9r^2 \pi, \text{ indem } q = 2r\sqrt{3} \text{ ist.}$$

Diese Oberfläche mit der der Kugel M verglichen, gibt:

$$M : K = 4r^2 \pi : 9r^2 \pi = 4 : 9, \text{ d. h.}$$

die Oberfläche der Kugel verhält sich zur ganzen Oberfläche des darum beschriebenen gleichseitigen Kegels, wie 4 : 9.

Zusatz. Da nun aus dem Bisherigen

$$M : k = 16 : 9 [1.]$$

$$\text{und } M : K = 4 : 9 [3.] \text{ ist, so ist auch}$$

$$k : K = 4 : 16 = 1 : 4, \text{ d. h.}$$

der um die Kugel construirte gleichseitige Kegel ist viermahl so groß, als der in derselben beschriebene.

III. A b s c h n i t t.

Vergleichung der geometrischen Körper.

A. Vergleichung der Prismen unter sich.

§. 133.

Lehrsatz. Zwey Prismen mit congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind congruent, wenn ihre Seitenflächen der Ordnung nach gleiche Neigungen gegen die Grundflächen haben.

Beweis. Man lege die congruenten Grundflächen

so auf einander, daß sie sich decken, dann muß jedes Paar gleichnamiger Seitenflächen zusammenfallen, indem sie der Ordnung nach gleiche Neigungen gegen ihre Grundfläche haben. Ueberdies fallen auch die Ebenen der entgegengesetzten Grundflächen zusammen, denn sie sind zu den auf einander gelegten parallel und gleichweit von ihnen entfernt; es müssen dann auch die Durchschnittslinien dieser letztern Ebenen und der Seitenflächen, mithin die entgegengesetzten Grundflächen selbst zusammen fallen. Es paßt also das eine Prisma genau in das andere, und beyde sind congruent.

I. Zusatz. Würfel sind congruent, wenn sie gleiche Seiten haben [Lehrs.], und gleich große Würfel haben gleiche Seiten.

II. Zusatz. Senkrechte Cylinder sind congruent, wenn ihre Grundflächen gleiche Durchmesser haben, und ihre Achsen gleich sind [Lehrs.].

III. Zusatz. Wenn man eine Seite oder die Höhe eines Prisma in gleich große Theile theilt, und durch die Theilungspuncte Ebenen parallel zur Grundfläche legt, so wird dadurch das ganze Prisma in so viele congruente kleinere Prismen getheilt, als Theile vorhanden sind [Lehrs.]. Dasselbe gilt auch für den Cylinder.

§. 134.

Lehrsatz. Ein Parallelepipedon wird durch eine Ebene, die zwey gegenüberliegende Seitenflächen nach ihren Diagonalen schneidet, in zwey congruente dreyseitige Prismen getheilt.

Beweis. (Fig. 141.)

Thes. $ABCDEF \cong BCGFEH$.

Daten. Da CB und EF Diagonalen von den congruenten Parallelogrammen AG und DH sind, so ist $\triangle ABC \cong \triangle DEF \cong \triangle CBG \cong \triangle EFH$, und, da $AD \parallel CE \parallel BF \parallel GH$ und auch $AG \parallel DH$ ist, so sind die beyden Theile $ABCDEF$ und $BCGEFH$ des Parallelepipedon dreyseitige Prismen [§. 121. 1.].

Man nehme beym einen dreyseitigen Prisma das

$\triangle DEF$ und beym andern das $\triangle CBG$ als Grundflächen an. Diese sind nach Obigem congruent. Da $AG \parallel DH$ ist, so haben beyde dreyseitigen Prismen gleiche Höhen. Auch haben ihre Seitenflächen der Ordnung nach gleiche Neigungen gegen ihre Grundflächen; denn, da $AG \parallel DH$ und $AE \parallel BH$ [§. 121. 3] ist, so hat AE dieselbe Neigung gegen die Grundfläche DEF als BH gegen BCG . Dasselbe gilt von AF gegen die Grundfläche DEF und von CH gegen BCG , denn es ist $AF \parallel CH$. Da ferner die Parallelen Ebenen AG und DH durch die Diagonal-Ebene CF , welche beyden dreyseitigen Prismen zukömmt, geschnitten sind, so hat diese gegen die eine Grundfläche DEF dieselbe Neigung als gegen die andere BCG . Es muß also nach §. 133.

$ABCDEF \cong BCGEFH$ seyn.

Zusatz. (Fig. 141.) Ein dreyseitiges Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipedons, welches mit ihm dieselbe Höhe, aber eine doppelt so große Grundfläche hat. Denn es ist

$$ABCDEF = BCGEFH = \frac{1}{2} DG. \text{ [Lehrs.]}$$

§. 135.

Lehrsatz. Parallelepipedon mit einerley Grundfläche und gleichen Höhen (d. i. wenn sie zwischen zwey parallel Ebenen fallen) sind gleich groß.

Beweis. Hier ergeben sich zwey Hauptfälle:

I. Entweder liegen die Parallelepipedon mit zwey Seitenflächen in einer Ebene (Fig. 142. 143. 144.),

II. oder nicht (Fig. 145).

Jeder dieser Hauptfälle zerfällt in drey Nebenfälle und zwar:

a) Es liegen die beyden, den gemeinschaftlichen Grundflächen gegenüberstehenden Grundflächen zum Theile in einander,

b) oder sie stoßen aneinander, oder

c) sie fallen ganz auseinander. Daher:

Ad I. ad a. (Fig. 142.) *Thes.* $AH = GK$.

Daten. $CH = CH \parallel AM$.

Man betrachte die beyden dreyseitigen Prismen $AICELG$ und $BKDFMH$, dann ELG und FMH als ihre Grundflächen, so findet sich, weil auch $AG \# BH$ und $IG \# KH$ [§. 121. 3.] ist, daß

$AICELG \cong BKDFMH$ ist [§. 133.].

Nun ist $IBCDLFGH = IBCDLFGH$, mithin

$$AICELG + IBCDLFGH = BKDFMH + IBCDLFGH.$$

$$\text{oder } AH = GK.$$

ad b. (Fig. 143.) Thes. $AH = GI$.

Daten. $CH = CH \# AK$.

Es ist $ABCEFG \cong BCDFGH$ } [§. 134.],
und $BCDFGH \cong BIDFKH$ }

$$\text{folgl. } ABCEFG + BCDFGH = BCDFGH + BIDFKH,$$

$$\text{oder } AH = GI.$$

ad c. [Fig. 144.] Thes. $AH = GM$.

Daten. $GD = GD \# AK$.

Man betrachte die beyden dreyseitigen Prismen $ACLEIG$ und $BDMFHK$, so wie EIG und FKH als ihre Grundflächen, so ist, da auch $AG \# BH$ und $LG \# MH$ [§. 121. 3.] ist,

$ACLEIG \cong BDMFHK$ [§. 133.],

nun ist $BLNFIO = BLNFIO$

und $NCDOGH = NCDOGH$; folglich auch

$$ACLEIG + BLNFIO + NCDOGH = BDMFHK + BLNFIO + NCDOGH,$$

$$\text{oder } AH = GM.$$

Ad II. Um den zweyten Hauptfall (Fig. 145.) zu beweisen, betrachte man AH mit GK . Es soll

Thes. $AH = GK$ seyn.

Dat. $EH = EH \# XY$.

Man construire das Hilfs - Parallelepipedon GO , welches mit seinen verticalen Seitenflächen in die Ebenen der verticalen Seitenflächen des Parallelepipedon GK , und mit seinen horizontalen Seitenflächen in die Ebenen der horizontalen Seitenflächen des Parallelepipedon AH fällt. Es ist demnach:

$$AH = GO \text{ [I. c.]}$$

$$GO = GK \text{ [I. a.]},$$

$$\text{mithin } AH = GK.$$

I. Zusatz. Parallelepipeden von congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich; denn, legt man sie mit ihren congruenten Grundflächen zusammen, so ergibt sich ihre Gleichheit aus dem Lehrsatz, indem dann ihre beyden andern Grundflächen in eine zur ersteren parallele Ebene fallen müssen.

II. Zusatz. Alle dreyseitigen Prismen mit einerley oder congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich; denn sie sind, nach §. 134. *Zus.* Hälften von Parallelepipeden mit derselben Höhe aber doppelter Grundfläche [*Lehrs. und Zus. I.*].

III. Zusatz. (Fig. 146.) Alle Prismen mit einerley oder congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich; denn sie lassen sich durch gleichliegende Diagonal-Ebenen in dreyseitige zerlegen, welche einzeln der Ordnung nach gleich sind [*Zus. II.*], und wenn die Theile gleich sind, so sind es auch die Ganzen.

IV. Zusatz. Alle Cylinder mit einerley oder congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich groß [*Zus. III. und § 121. 2.*].

V. Zusatz. (Fig. 147.) Jedes schiefwinklige Parallelepipeton ist einem rechtwinkligen gleich, das mit ihm gleich große Grundfläche und Höhe, dann eine Seitenkante der Grundfläche gemein hat; d. i. $AF = AK$, wenn das Rechteck $AL =$ dem Rhomboide AH und $PF \# AH$ ist. Denn, stellt man auf die Grundfläche AH des schiefwinkligen Parallelepipeton AF die Seitenflächen PD , CH , MH und PI senkrecht, und erweitert man die Ebene BF bis sie diese senkrechten Seitenflächen schneidet, so entsteht das Parallelepipeton AG , welches Rechtecke zu Seitenflächen und das Rhombus AH zur Grundfläche hat; und es ist $AG = AF$ [*Lehrs. II.*].

Betrachtet man nun PD als Grundfläche des Parallelepipeton AG , und stellt man auf diese die Ebenen CL und PO senkrecht, erweitert sodann die Ebenen MH , PG und AH bis sie diese senkrechten Ebenen schneiden, so entsteht wieder ein Parallelepipeton AK ,

dessen Grund- und Seiten-Flächen Rechtecke sind, und es ist

$$AK = AG \quad [\text{Lehrs. I. a.}]$$

$$\text{Nun ist schon } AG = AF \quad [\text{Lehrs. II.}],$$

$$\text{mithin } AK = AF.$$

Man kann demnach jedes schiefwinklige Parallelepipedon in ein gleiches rechtwinkliges verwandeln.

§. 136.

Lehrsatz. Wenn man ein Parallelepipedon durch eine Ebene, parallel mit einer Seitenfläche, schneidet, so verhalten sich die abgeschnittenen Stücke zu einander wie ihre Grundflächen.

Beweis. (Fig. 148.)

$$\text{Thes. } AI : KF = AM : KH.$$

$$\text{Daten. } LM \parallel CG \parallel DH.$$

Man messe AK und KB durch einerley Maß, so wird sich finden, daß das gemeinschaftliche Maß, z. B. AN , auf AK , m , und auf KB , n Mahl aufgetragen werden kann, und es ist dann

$$AK : KB = m : n.$$

Durch das Auftragen von AN ist die Linie AK in m , und die Linie KB in n , unter sich gleiche, Theile getheilt. Legt man nun durch diese einzelnen Theilungspuncte, parallel zur Seitenfläche CG , Ebenen, so wird dadurch das Parallelepipedon AI in m , und das Parallelepipedon KF in n kleinere, unter sich congruente, Parallelepipedon getheilt [§. 133. Zus. III.], und es ist:

$$AI : KF = m : n. \quad \text{Es ist aber}$$

$$AK : KB = m : n, \quad \text{folglich}$$

$$\text{auch } AI : KF = AK : KB. \quad \text{Nun ist}$$

$$AK : KB = AM : KH \quad [\text{§. 68. Zus.}]$$

$$\text{Mithin } AI : KF = AM : KH.$$

Ist das Verhältniß $m : n$ nicht rational, so nehme man das Maß AN so klein an, als nöthig ist, um

sich dem rationalen Verhältnisse so viel möglich zu nähern. [Arithm.]

Zusatz. Wenn man ein Parallelepipedon durch eine Ebene parallel mit einer Seitenfläche durchschneidet, so verhält sich jeder Theil desselben zum ganzen Parallelepipedon wie die Grundfläche des Theiles zu der des ganzen. Denn es ist aus obigem Lehrs.

$AI + KF : AI \text{ oder } KF = AM + KH : AM \text{ od. } KH$
oder $AF : AI \text{ oder } KF = AH : AM \text{ oder } KH$.

§. 137.

Lehrsatz. Rechtwinklige Parallelepipedon mit gleichen obgleich unähnlichen Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich.

Beweis. (Fig. 149.) *Thes.* $AF = LP$.

Daten. 1) Beyde rechtwinklige Parallelepipedon AF und LP haben gleiche Höhen DB und QN , und gleiche Grundflächen, nämlich $AH = LO$. — Man erweitere die Ebenen CF , AD , AH und EH des Parallelepipedon AF über DF , DB , BH und FH hinaus, mache die Durchschnittslinie $BU = NO$, und schneide die erweiterten Ebenen durch eine, durch U parallel zu BF gelegte, Ebene RT ; so ist BS ein Parallelepipedon [§. 121. 3.].

2) Betrachtet man die Rechtecke BR und NP , so findet sich, daß $BR \cong NP$ ist, indem $BU = NO$ (construct.) und $DB = QN$ [Daten 1.)] ist.

3) Man erweitere nun die Ebenen DS , DH , BT und RT des Parallelepipedon BS über die Seiten DR , DB , BU und RU hinaus, mache die Durchschnittslinie $BW = NL$, und lege durch W , parallel mit BR , eine Ebene WY , welche die so eben erweiterten Ebenen schneidet; dann ist WR wieder ein Parallelepipedon [§. 121, 3.]. — Da nun $BR \cong NP$ [2.] und $BW = NL$ [constr.] ist, so muß $WR = LP$ [§. 135. *Zus. I.*] seyn.

4) Indem, in den beyden Rechtecken WU und LO , $BU = NO$ und $BW = LN$ ist,

so muß $WU = LO$ seyn. Nun
ist auch $AH = LO$ [Daten.], folglich

$$WU = AH.$$

5) Nach §. 136. ist:

$$AF : BS = AH : BT$$

$$\text{und } WR : BS = WU : BT.$$

$$\text{Daher } AF : WR = AH : WU.$$

Nun ist $AH = WU$ [4.], mithin muß

auch $AF = WR$ seyn. Es ist aber

auch $WR = LP$ [3.], folglich

$$AF = LP.$$

I. Zusatz. Alle Parallelepipeden mit gleichen, obgleich unähnlichen, Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich. Denn, sind beyde rechtwinklig, so sind sie, wie so eben gezeigt wurde, gleich. Ist eines davon schief, so verwandle man es [nach §. 135. Zus. V.] in ein rechtwinkliges; dieses ist dann dem schiefen [§. 135], und dem andern senkrechten [Lehrs.], folglich auch dieses letzte dem schiefen Parallelepipeden gleich. Sind beyde Parallelepipeden schief, so verwandle man beyde [§. 135. Zus. V.] in rechtwinklige; alsdann sind beyde rechtwinklige Parallelepipeden gleich [Lehrs.], auch ist jedes rechtwinklige dem dazu gehörigen schiefen gleich [§. 135.]; also sind auch beyde schiefe Parallelepipeden gleich groß.

II. Zusatz. Alle dreyseitigen Prismen mit gleichen, obgleich unähnlichen, Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich [Zus. I. und §. 134. Zus.].

§. 138.

Lehrsatz. Zwey rechtwinklige Parallelepipeden mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Beweis. (Fig. 150.)

$$\text{Thes. } GB : PK = GF : PO.$$

Daten. 1) $CG = LP$. Man erweitere die Ebenen AD , AF , GF und CH des Parallelepipeden GB über

BD , BF , FH und DH hinaus, mache das Rechteck HS (mit der Seite FH) so groß als PO [§. 49. 3.], und schneide die erweiterten Ebenen durch eine durch U , parallel zu BH gelegte, Ebene UR . Dann ist HR ein Parallelepipedon [§. 121. 3.] und gleich groß mit PK [§. 137.].

2) Nach §. 136. ist:

$$GB : HR = GF : HS; \text{ also auch}$$

$$GB : PK = GF : PO, \text{ denn es ist}$$

$$HR = PK \text{ und } HS = PO \text{ [1.].}$$

I. Zusatz. Alle Parallelepipedon mit gleichen Höhen verhalten sich zu einander wie ihre Grundflächen. Für den Fall, daß beyde zu vergleichenden Parallelepipedon rechtwinklig sind, bürgt der Lehrsatz. Ist aber eines von den Parallelepipedon, oder sind beyde schiefwinklig, so verwandle man das eine oder beyde zuerst in rechtwinklige [§. 135. Zus. V.], wo sich dann ihr Verhältniß aus dem Lehrsatze ergibt.

II. Zusatz. Alle dreyseitigen Prismen verhalten sich zu einander wie ihre Grundflächen, wenn sie gleiche Höhen haben [Zus. I. u. §. 134. Zus.].

§. 139.

Lehrsatz. Jedes Prisma verhält sich zum dreyseitigen von gleicher Höhe wie die Grundfläche des ersteren zu der des zweyten.

Beweis (Fig. 151.) Man bezeichne das mehrseitige Prisma $ADFI$ durch M und das dreyseitige LPQ durch N , so wie des ersteren Grundfläche durch P und die des zweyten durch Q , so soll

$$\text{Thes. } M : N = P : Q \text{ seyn.}$$

Daten. 1) Man zerlege das mehrseitige Prisma M durch die Diagonal-Ebenen BK , KC etc. in die dreyseitigen Prismen $ABEFGK$, $BECGHK$ und $CEDHKI$, welche wir der Ordnung nach mit A , B und C , und ihre treffenden Grundflächen mit a , b und c bezeichnen wollen.

2) Nun ist, da M und N , folglich auch A , B , C und N , gleiche Höhen haben, nach §. 138. Zus. II.

$$A : N = a : Q$$

$$B : N = b : Q$$

$$C : N = c : Q \text{ etc., folglich}$$

$$A + B + C : 3N = a + b + c : 3Q \text{ und}$$

$$A + B + C : N = a + b + c : Q, \text{ oder}$$

$$M : N = P : Q, \text{ indem}$$

$$A + B + C = M \text{ und } a + b + c = P \text{ ist.}$$

I. Zusatz. Jedes vielseitige Prisma ist einem dreyseitigen gleich, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat. Denn, ist in obiger Proportion [Lehrs.] $P = Q$, d. h. ist die Grundfläche des mehrseitigen Prisma gleich der des dreyseitigen, so muß auch $M = N$ seyn.

II. Zusatz. Alle Prismen, die gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind gleich groß [Zus. I. und §. 137. Zus. II.].

III. Zusatz. Jeder Cylinder ist einem Prisma gleich das mit ihm gleich große Grundfläche und Höhe hat. [Zus. II. und §. 121. 2.]

IV. Zusatz. Jedes Prisma und jeder Cylinder ist einem Parallelepipedon mit gleich großer Grundfläche und Höhe gleich [Zus. II. und III.].

V. Zusatz. Alle Prismen und Cylinder mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen [Zus. IV. und §. 138. Zus. I.].

B. Vergleichung der Pyramiden unter sich und mit Prismen.

§. 140.

Lehrsatz. Wenn man eine Pyramide durch eine oder mehrere Ebenen parallel zur Grundfläche schneidet, so verhalten sich die Durchschnitsfiguren wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

Beweis. (Fig. 125.) Man fälle von der Spitze A die Senkrechte AF , so soll:

$$\text{Thes. } bd : BD = Af^2 : AF^2 \text{ seyn.}$$

Daten. 1) Es ist $bd \parallel BD$, folglich $bd \sim BD$ [§. 122. Zus. I.]. Dann ist auch

$$bd : BD = bc^2 : BC^2 \text{ [§. 102.].}$$

2) Legt man durch A , B und F eine Ebene, so ist $bf \# BF$ [§. 113. Zus. III.], folglich:

$$Af : AF = Ab : AB \text{ [§. 71.], auch } bc : BC = Ab : AB \text{ [§. 71. Zus. III.].}$$

Mithin $Af : AF = bc : BC$ und

$$Af^2 : AF^2 = bc^2 : BC^2. \text{ Es ist aber } bd : BD = bc^2 : BC^2 \text{ [1.]; folglich}$$

$$bd : BD = Af^2 : AF^2.$$

I. Zusatz. Wenn man einen Kegel parallel zur Grundfläche durch eine oder mehrere Ebenen schneidet, so verhalten sich die Durchschnittenfiguren wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze. Auch ist die oben abgeschnittene Pyramide der ganzen ähnlich [§. 119.]. Dasselbe gilt für den Kegel.

II. Zusatz. Eine abgekürzte Pyramide kommt einem Prisma von derselben Grundfläche und Höhe um so näher, je kleiner ihre Höhe ist. Denn es ist [Fig. 125.] $bd : BD = Af^2 : AF^2$; je kleiner nun fF , die Höhe der abgekürzten Pyramide ist, desto näher kommt Af dem AF , d. i. das Verhältniß $Af : AF$, mithin auch $Af^2 : AF^2$ oder $bd : BD$, nähert sich immer mehr dem Verhältnisse der Gleichheit 1, und beyde ähnlichen Grundflächen der abgekürzten Pyramide sind immer weniger an Gröſſe unterschieden, die Seiten-Trapeze nähern sich immer mehr Parallelogrammen, mithin auch die abgekürzte Pyramide selbst einem Prisma mit derselben Grundfläche und Höhe [§. 121. 1.].

III. Zusatz. Ein abgekürzter Kegel kommt einem Cylinder von derselben Grundfläche und Höhe um so näher, je kleiner seine Höhe ist [Zus. II.].

IV. Zusatz. Die abgekürzte Pyramide, deren Höhe unendlich klein ist, verwandelt sich in ein Prisma von derselben Grundfläche und Höhe. Denn die beyden Grundflächen sind congruent die Seiten-Flächen Parallelogramme [Zusatz II.], folglich der Körper ein Prisma [§. 121. 1.]. Eben deßwegen ist

auch ein abgekürzter Kegel, dessen Höhe unendlich klein ist, einem Cylinder von derselben Grundfläche und Höhe gleich.

V. Zusatz. (Fig. 152.) Haben zwey Pyramiden $ABCD$ und $MNOPQ$ gleich große Grundflächen und Höhen, so sind auch jene zwey zu den Grundflächen parallele Durchschnittenfiguren gleich groß, welche von den Spitzen der Pyramiden gleichweit abstehen; d. i. $\triangle bcd = np$, wenn $\triangle BCD = NP$, und $AE = MR$, $Ae = Mr$, dann $bcd \# BCD$ und $np \# NP$ ist. Denn es ist hier:

$$\begin{aligned} \triangle BCD : \triangle bcd &= AE^2 : Ae^2 \\ NP : np &= MR^2 : Mr^2 \quad [\text{Lehrs.}] \end{aligned}$$

Nun ist $AE = MR$, $Ae = Mr$ [Vorauss.], also auch $AE^2 = MR^2$ und $Ae^2 = Mr^2$, mithin

$$\begin{aligned} \triangle BCD : \triangle bcd &= NP : np, \text{ und, weil} \\ \triangle BCD &= NP \text{ [Vorauss.]} \text{ ist, so muß auch} \\ \triangle bcd &= np \text{ seyn.} \end{aligned}$$

§. 141.

Lehrsatz. (Fig. 152.) Alle Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich.

Beweis. Thes. $ABCD = MNP$.

Dat. $\triangle BCD = NP$ und $AE = MR$.

Man stelle sich die beyden Höhen AE und MR in unendlich viele gleiche Theile getheilt, und durch alle Theilungspuncte zur Grundfläche parallele Ebenen vor; so bestehen beyde Pyramiden aus unendlich vielen abgekürzten Pyramiden [§. 122. 1.], welche Prismen gleich sind [§. 140. Zus. IV.]. Diese kleinen Prismen haben der Ordnung nach gleich große Grundflächen [§. 140. Zus. V.] und gleiche Höhen, mithin ist das erste Prisma der einen Pyramide dem ersten der andern, das zweyte der einen dem zweyten der andern etc. gleich [§. 139. Zus. II.]. Nun bestehen die beyden Pyramiden aus gleich vielen solchen der Ordnung nach gleichen Prismen; es muß also die Summe aller Prismen der einen Pyramide der Summe aller Prismen der andern, folglich auch die eine Pyramide der andern gleich seyn; d. i. $ABCD = MNP$.

I. Zusatz. Jeder Kegel ist einer Pyramide gleich, die mit ihm gleich große Grundfläche und Höhe hat [Lehrs. u. §. 122. 2.].

§. 142.

Lehrsatz. Mehrere Pyramiden $P, p, \pi \dots$ mit der gleichen Höhe H und mit den Grundflächen B, b, β sind zusammen einer Pyramide M gleich mit derselben Höhe H und der Grundfläche Q , welche der Summe jener Grundflächen $B, b, \beta \dots$ gleich ist.

Beweis. Thes. $M = P + p + \pi \dots$

Daten. $H = H$ und $Q = B + b + \beta + \dots$

Man zerlege die Grundfläche Q der Pyramide M in ihre Theile B, b, β , etc. . . [§. 105. und Zus.]. Durch die Spitze der Pyramide M und durch jede der Theilungslinien der Grundfläche lege man Ebenen, so wird dadurch diese Pyramide in eben so viele kleinere Pyramiden getheilt, als die Grundfläche Q Theile hat [§. 122. 1.]. Diese einzelnen Pyramiden haben eine gemeinschaftliche Spitze, folglich alle die Höhe H ; die erste davon hat mit der Pyramide P , die zweyte mit der Pyramide p , die dritte mit der Pyramide π etc. gleich große Grundfläche und Höhe, sie sind also je zwey und zwey einander gleich [§. 141.]; es müssen demnach auch die ersteren zusammen genommen der Summe der letzteren gleich seyn,

d. i. $M = P + p + \pi$.

Zusatz. Mehrere Kegel von gleichen Höhen sind zusammen einem Kegel oder einer Pyramide mit derselben Höhe gleich, wovon die Grundfläche der Summe der Grundflächen der einzelnen gleicht.

§. 143.

Lehrsatz. Die dreyseitige Pyramide ist der dritte Theil eines dreyseitigen Prisma mit derselben Grundfläche und Höhe.

Beweis. (Fig. 153.)

Thes. $\text{Pyr. } BDEF = \frac{1}{3} \text{ Prism. } AEF$.

Daten. 1) Man lege im Prisma AEF durch B, D und F , dann durch B, C und D Ebenen, so wird

dadurch das Prisma in die drey Pyramiden $BDEE$, $ABCD$ und $BCDF$ zertheilt, von welchen die ersten zwey mit dem Prisma dieselbe Grundfläche und Höhe haben, und es ist $BDEF = ABCD$ [§. 141.].

2) Nimmt man bey der Pyramide $ABCD$ das $\triangle ADC$ und bey der Pyramide $BCDF$ das $\triangle DCF$ als Grundflächen an, so ist B ihre gemeinschaftliche Spitze, sie haben also gleiche Höhen [§. 110. Zus. I.], und gleiche Grundflächen [§. 42. Zus. II.]; mithin ist auch

$$BCDF = ABCD \text{ [§. 141.].}$$

Es ist aber $BDEF = ABCD$ [1.]; folglich

$$BCDF = ABCD = BDEF, \text{ also auch}$$

$$\text{Pyr. } BDEF = \frac{1}{3} \text{ Prism. } AEF.$$

I. Zusatz. Jede Pyramide p ist überhaupt der dritte Theil eines jeden Prisma P , welches mit ihr gleiche Höhe H und Grundfläche B hat, oder $p = \frac{1}{3} P$. Denn, wenn m eine dreyseitige Pyramide und M ein dreyseitiges Prisma von der Höhe H und der Grundfläche B bezeichnen; so ist $M = P$ [§. 139. Zus. II.], $m = p$ [§. 141.], $m = \frac{1}{3} M$ [Lehrs.], folglich $p = \frac{1}{3} M = \frac{1}{3} P$.

II. Zusatz. Jeder Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat [Zus. I. und §. 122. 2.].

§. 144.

Lehrsatz. Prismen von gleich grossen Grundflächen verhalten sich zu einander wie ihre Höhen.

Beweis. (Fig. 154.)

$$\text{Thes. Prism. } AEF : \text{Prism. } GN = H : h.$$

$$\text{Dat. 1) } \triangle DEF = LN, AD = H, GL = h.$$

Man messe die Höhen H und h durch einerley Mafs z. B. durch AD , so wird sich finden, dafs dieses Mafs auf H , m und auf h , n Mahl aufgetragen werden kann, und es mufs

$$H : h = m : n \text{ seyn.}$$

2) Durch dieses Auftragen wird H in n und h in m gleiche Theile getheilt. Man lege durch diese Thei-

lungspuncte, parallel zur Grundfläche, Ebenen, so wird dadurch das Prisma AEF in m und das Prisma GN in n kleinere Prismen getheilt, welche alle unter sich gleich sind [§. 139. Zus. II.], denn sie haben gleich große Grundflächen und Höhen [§. 121. Zus. I.]. Es muß also auch

$\text{Prism. } AEL : \text{Prism. } GN = m : n$, und da auch $H : h = m : n$ [1.] ist, so muß $\text{Prism. } AEL : \text{Prism. } GN = H : h$ seyn.

Ist das Verhältniß $m : n$ irrational, so nehme man das Maß aD so klein an, als nöthig ist, um sich dem rationalen Verhältnisse so viel als nur möglich ist zu nähern [Arithm.].

I. Zusatz. Alle Parallelepipeden und Cylinder von gleichen Grundflächen verhalten sich zu einander wie ihre Höhen. [Lehrs. u. §. 139. Zus. II. u. III.]

II. Zusatz. Alle Pyramiden und Kegel von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen [Lehrs. u. §. 143. Zus. I. und II.].

III. Zusatz. Rechtwinklige Parallelepipeden mit gleichen Längen und Breiten, verhalten sich zu einander wie ihre Höhen; denn rechtwinklige Parallelepipeden, deren Längen und Breiten gleich sind, haben eben deswegen gleiche Grundflächen.

IV. Zusatz. Rechtwinklige Parallelepipeden mit gleicher Länge und Höhe verhalten sich zueinander wie ihre Breiten [Zus. III.]; denn man kann bey jedem rechtwinkligen Parallelepipeden die drey Dimensionen verwechseln, und was im Parallelepipeden des vorigen Zusatzes Breite war nun als Höhe, und was Höhe war nun als Breite betrachten.

V. Zusatz. Rechtwinklige Parallelepipeden mit gleichen Breiten und Höhen verhalten sich wie ihre Längen [Zus. III.], denn man kann im Parallelepipeden des III. Zusatzes die Länge mit der Höhe verwechseln.

§. 145.

Lehrsatz. Rechtwinklige Parallelepipeden verhal-

ten sich zu einander wie die Producte aus ihren Längen, Breiten und Höhen.

Beweis. Gesetzt A und B seyen die Parallelepipeden, L, B, H des ersteren und l, b, h des letzteren Länge, Breite und Höhe, so ist zu zeigen, dafs:

Thes. $A : B = L . B . H : l . b . h$ ist.

Daten. Man wähle ein Hilfsparallelepipeton C, welches l, B, H und noch ein zweytes D, welches l, b, H zur Länge, Breite und Höhe hat. Es ist:

$$A : C = L : l \quad [\S. 144. \text{Zus. V.}].$$

$$C : D = B : b \quad [\S. 144. \text{Zus. IV.}].$$

$$D : B = H : h \quad [\S. 144. \text{Zus. III.}].$$

Mithin $A.C.D : C.D.B = L.B.H : l.b.h.$ und

$$A : B = L.B.H : l.b.h.$$

I. Zusatz. Alle rechtwinkligen Parallelepipeden verhalten sich zu einander, wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen, d. i.

$$A : B = Basis \times H : basis \times h.$$

Denn es gibt das Product aus der Länge und Breite, oder $L.B$, die Grundfläche [*Basis*] des einen, und $l.b$ die Grundfläche [*basis*] des anderen Parallelepipeton. Da nun $A : B = L.B.H : l.b.h$ [*Lehrs.*] ist, so muß auch $A : B = Basis \times H : basis \times h$ seyn.

II. Zusatz. Alle Parallelepipeden, Prismen und Cylinder verhalten sich zu einander wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen [*Zus. I. dann §. 135. Zus. V. und §. 139. Zus. IV.*].

III. Zusatz. Alle Pyramiden und Kegel verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen [*§. 143. Zus. I. u. II.*]. Sind letztere gleich, so verhalten sich die Pyramiden oder Kegel wie ihre Grundflächen, und sind erstere d. i. die Grundflächen gleich, wie ihre Höhen.

§. 146.

Lehrsatz. Jede Kugel ist dem körperlichen Inhalte nach einer Pyramide gleich, welche die Oberfläche

der Kugel zur Grundfläche und den Radius derselben zur Höhe hat.

Beweis. Man denke sich die Oberfläche der Kugel in eine Menge unendlich kleiner Dreyecke getheilt, welche einzeln als ebene Figuren angesehen werden können, deren Entfernung vom Mittelpuncte der Kugel der Radius ist. Betrachtet man diese Dreyecke als die Grundflächen von Pyramiden, deren Spitzen in dem Mittelpuncte der Kugel sich befinden, so ergibt sich, daß die Kugel zusammengesetzt ist aus einer unendlich großen Anzahl von Pyramiden, deren Grundflächen unendlich kleine Theile der Oberfläche der Kugel und deren Höhe der Radius ist. Da alle diese Pyramiden gleiche Höhen haben, so gleichen sie zusammen einer Pyramide, deren Grundfläche die Summe der Grundflächen der einzelnen Pyramiden, d. i. die ganze Oberfläche der Kugel, und deren Höhe der Radius der Kugel ist [§. 142]. Es muß also die Kugel selbst dieser Pyramide gleichen.

Zusatz. Ein Kugelabschnitt (Sector) ist seinem körperlichen Inhalte nach einer Pyramide gleich, deren Grundfläche die krumme Oberfläche des Sector's und deren Höhe der Radius der Kugel ist [Lehrs. u. §. 142].

IV. A b s c h n i t t.

Ähnlichkeit der Körper im Allgemeinen.

§. 147.

Erklärung: Zwey ebene Körper (Polyeder) können überhaupt dann ähnlich heißen; wenn sie gleichviele ähnliche Begrenzungsflächen und congruente körperliche Winkel haben, und ihre gleichliegenden Kanten, so wie die homologen Diagonalen zwischen gleichliegenden körperlichen Ecken derselben, in Proportion stehen, wenn also solche Körper in der Form ihrer Bildung, aber nicht in Hinsicht ihrer GröÙe mitein-

ander übereinstimmen [§. 119. u. §. 119. Zus. I.]. Durch homologe Diagonal - Ebenen kann man sich solche ähnliche Körper in ähnliche dreyseitige Pyramiden in gleicher Ordnung zerlegt denken.

I. Zusatz. Alle gleichnamigen regulären geometrischen Körper sind ähnlich [Erkl. u. §. 119.].

II. Zusatz. Alle Kugeln sind ähnlich, denn man kann sich selbe als ähnliche Polyëder von unendlich vielen ähnlichen Seitenflächen vorstellen.

III. Zusatz. Alle senkrechten Cylinder sind ähnlich, wenn ihre Achsen sich verhalten wie die Radien oder Diameter ihrer Grundflächen. In derselben Bedeutung heißen auch zwey Kegel ähnlich.

§. 148.

Lehrsatz. Zwey ähnliche Prismen verhalten sich am körperlichen Inhalte zu einander, wie die Cubic-Zahlen (Cubuse) zweyer gleichnamigen Seiten oder Dimensionen.

Beweis. Man setze die beyden ähnlichen Prismen seyen P und p , ihre Grundflächen B und b , ein Paar homologe Seiten oder Dimensionen derselben A und a , dann ihre Höhen H und h ; so ist

Thes. $P : p = A^3 : a^3$. Denn

Daten. 1) Es ist $P : p = B.H : b.h$ [§. 145. Z. II].

2) Auch ist $B : b = A^2 : a^2$ [§. 102.]

und $H : h = A : a$ [§. 119. Zus. I.],

folglich $BH : bh = A^3 : a^3$, da aber

$P : p = BH : bh$ [1.] ist, so

muß auch $P : p = A^3 : a^3$ seyn.

I. Zusatz. Aus der Proportion des Lehrsatzes,

$P : p = A^3 : a^3$, ist auch

$\sqrt[3]{P} : \sqrt[3]{p} = A : a$, d. h. die homologen Seiten oder Dimensionen zweyer ähnlichen Prismen verhalten sich zu einander wie die Cubic - Wurzeln aus

den Zahlen, welche die körperlichen Räume der Prismen ausdrücken. Wäre also z. B.

$$P : p = 2 : 1; \text{ so müßte auch}$$

$$A : a = \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{1}, \text{ oder}$$

$$A : a = \sqrt[3]{2} : 1, \text{ folglich}$$

$$A = a\sqrt[3]{2} \text{ seyn.}$$

Gesetzt, a wäre die Seite eines Würfels $p = 1$ (als Einheit betrachtet), so wäre die Seite eines Würfels $P = 2$, von doppeltem Inhalte, nämlich $A = a\sqrt[3]{2}$, eine irrationale Zahlengröße, weil $\sqrt[3]{2}$ irrational ist. Arithmetisch läßt sich also ein Würfel verdoppeln, d. h. die Seite desselben $a\sqrt[3]{2}$ beliebig weit annähernd berechnen, aber geometrisch, genau durch eine Construction der niedern Geometrie, kann man diese Seite $a\sqrt[3]{2}$ nicht erhalten.

II. Zusatz. Aehnliche Cylinder verhalten sich gegen einander wie die Cubic-Zahlen der Radien oder Diameter ihrer Grundflächen [Lehrs.]; denn, wenn die Grundflächen $B = R^2\pi$ und $b = r^2\pi$ sind, so ist:

$$B : b = R^2\pi : r^2\pi$$

$$H : h = R : r \text{ [§. 119. Zus. I.]; mithin}$$

$$BH : bh = R^3\pi : r^3\pi, \text{ da}$$

$$\text{auch } BH : bh = \text{Cyl.} : \text{cyl.} \text{ [§. 145. Zus. II.] ist,}$$

$$\text{so muß } \text{Cyl.} : \text{cyl.} = R^3\pi : r^3\pi$$

$$= R^3 : r^3 \text{ seyn.}$$

III. Zusatz. Aehnliche Pyramiden und Kegel verhalten sich gegeneinander, wie die Cubic-Zahlen homologer Seiten oder Dimensionen,

§. 149.

Lehrsatz. Allgemein verhalten sich zwey ähnliche Körper (Polyëder) am körperlichen Inhalte gegeneinander, wie Cubic-Zahlen ihrer homologen Seiten, Kanten oder Dimensionen.

Beweis. Man kann sich zwey ähnliche Polyëder durch homologe Diagonal-Ebenen in gleichviele ähn-

liche dreyseitige Pyramiden zerlegt vorstellen. Nun verhalten sich je zwey dieser ähnlichen Pyramiden, gleichwie die Cubic - Zahlen von je zwey homologen oder ähnlich liegenden Seiten oder Dimensionen. Sind zwey solche ähnliche Pyramiden P und p , die zugehörigen homologen Dimensionen S und s , so ist

$$P : p = S^3 : s^3 \quad [\S. 148. \text{Zus. III.}].$$

Eben dieses Verhältniß gilt offenbar für je zwey andere ähnliche Pyramiden als Theile der Polyëder, also auch für die Summen der ähnlichen Pyramiden, nämlich für die ähnlichen Polyëder selbst. Sind nun zwey ähnlichliegende oder homologe Seiten derselben S und s , so verhält sich das eine Polyëder zum zweyten ähnlichen, wie $S^3 : s^3$.

Zusatz. Alle Kugeln verhalten sich ihrem körperlichen Inhalte nach wie die Cubuse ihrer Radien oder Durchmesser.

V. A b s c h n i t t.

Berechnung des körperlichen (cubischen) Inhaltes der geometrischen Körper.

§. 150.

Erklärungen. 1) Das Maas eines Körpers ist ebenfalls ein Körper, das gewöhnlichste der Cubic - Fuß, d. i. ein Cubus oder Würfel, wovon jede Seite einen Fuß mißt [$\S. 118. d.$]. Man theilt den Cubic - Fuß

A. nach der *Decimaleintheilung* in 1000 Cubic - Zoll, jeden Cubic - Zoll in 1000 Cubic - Linien, und jede Cubic - Linie in 1000 Cubic - Scrupel. 1000 Cubic - Fuß geben eine *Decimalcubic - Ruthe*.

B. nach der *Duodecimaleintheilung* in 1728 Cubic - Zoll jeden solchen Cubic - Zoll in 1728 Cubic - Linien und jede solche Cubic - Linie in 1728 Cubic - Scrupel. 1728 Cubic - Fuß geben eine *Duodecimalcubic - Ruthe*.

Man bezeichnet Cubic - Ruthen durch c^0 , Cubic - Schuh durch c' , Cubic - Zoll durch c'' , Cubic - Linien

durch c''' , und Cubic - Scrupel durch c'''' , welche Zeichen man rechts über die Zahlen setzt. So heisst z. B. 20^c $236^c'$ $52^c''$ etc, 20 Cubic - Ruthen, 236 Cubic - Fufs, 52 Cubic - Zoll etc.

2) Folgende Tabellen gewähren eine

Allgemeine Uebersicht über das Körpermass.

a) Decimalmass.

Cub. - Fufs.	Cub. - Zoll.	Cub. - Linien.	Cub. - Scrupel.
1.	1000.	1000000.	1000000000.
	1.	1000.	1000000.
		1.	1000.

b) Duodecimalmass.

Cub. - Fufs.	Cub. - Zoll.	Cub. - Linien.	Cub. - Scrupel.
1.	1728.	2085984.	5159780352.
	1.	1728.	2085984.
		1.	1728.

3) Einen Körper berechnen heisst angeben, wie oft das Mass in ihm enthalten ist, oder wie viel Cubic - Ruthen, Cubic - Fufs etc. derselbe enthält.

4) Bey dem neuen französischen Masse ist das Grundmass für den cubischen Inhalt fester Körper der *Cubic - Mètre* (*mètre cube*), *Stère* genannt. Der *Cubic - Mètre* enthält 1000 *Cubic - Decimètres*, oder 1000000 *Cubic - Centimètres*, oder 1000000000 *Cubic - Millimètres*. — Für flüssige Körper ist das Grundmass das *Litre*, gleich gross mit dem *Cubic - Decimètre*. Hier herrscht folgende Eintheilung:

Ein *Kilolitre* od. 1000 *Litres* = 1 *Cub. Mètre*.

» <i>Hectolitre</i>	»	100	»	= 0,1	»	»
» <i>Décalitre</i>	»	10	»	= 0,01	»	»
» <i>Litre</i>	»	1	»	= 0,001	»	= 1 <i>Cub. Decim.</i>
» <i>Décilitre</i>	»	0,1	»	= 0,0001	»	= 0,1 »
» <i>Centilitre</i>	»	0,01	»	= 0,00001	»	= 0,01 »
» <i>Millilitre</i>	»	0,001	»	= 0,000001	»	= 0,001 » = 1 <i>Cub. Centim.</i>

§. 151.

Aufgaben. 1) Man soll $40^c' 216^{c''}$ Duodecimalmafs in Decimalmafs verwandeln.

Auflösung. Da der Cubic-Fufs für das Decimal-Mafs derselbe ist, wie für das Duodecimalmafs, so braucht man blofs die $216^{c''}$ in Decimalmafs zu verwandeln. Es ist

$$1728 : 1000 = \overset{\text{Dd. c''}}{216} : \overset{\text{Dec. c''}}{x} \quad [\S. 150.].$$

$$\text{Mithin } x = \frac{216000}{1728} = 125^{c''} \text{ Decimalm.}$$

Es geben also $40^c' 216^{c''}$ Duodecimalmafs im Decimalmafs $40^c' 125^{c''}$.

2) Was geben $2^c 8^c' 9^{c''}$ Decimalmafs im Duodecimalmafs?

Auflösung. Man verwandle zuerst $2^c 8^c'$ in Duodecimalmafs. Es ist nämlich das Decimalmafs $2^c 8^c' = 2008^c' = 1^c 280^c'$ Duodecimalmafs. Nun verwandle man die $9^{c''}$ in Duodecimalmafs. Nämlich:

$$1000 : 1728 = \overset{\text{D. c''}}{9} : \overset{\text{Dd. c''}}{x} \quad [\S. 150.], \text{ woraus}$$

$$x = 15,552$$

$$= 15^{c''} 953^{c'''} 1479,2^{c'''} \text{ Duod. M.}$$

Es geben also $2^c 8^c' 9^{c''}$ Decimalmafs im Duodecimalmafs ausgedrückt $1^c 280^c' 15^{c''} 953^{c'''} 1479,2^{c'''}.$

3) Man soll $3^c 26^c' 42^{c''} 130^{c'''}$ Decimalmafs in Duodecimalmafs verwandeln.

Auflösung. Man verwandle wieder zuerst die Ruthen und Schuh in das Duodecimalmafs d. i.

das Decimalm. $3^c 26^c' = 3026^c' = 1^c 1298^c'$ Dd. Mafs.

Nun verwandle man die gegebenen $42^{c''} 130^{c'''}$ in Duodecimalmafs, nachdem man zuerst alles auf die kleinste Benennung gebracht hat. Es sind nämlich $42^{c''} 130^{c'''} = 42130^{c'''}; \text{ ferner}$

$$1000000 : 2085984 = \overset{\text{D. c'''}}{42130} : \overset{\text{Dd. c'''}}{x} \quad [\S. 150.].$$

$$\text{Daher } x = 125799, 50592^{c'''} \text{ Dd. Mafs.}$$

$$= 72^{c''} 1383,50592^{c'''} \text{ »}$$

$$= 72^{c''} 1383^{c'''} 874,2^{c'''} \text{ »}$$

Es geben also $3^{\circ} 26' 42'' 130'''$ Decimalmafs im Duodecimalmafs ausgedrückt $1^{\circ} 1298' 72'' 1383''' 874,2''''$.

4) Was geben $6^{\circ} 210' 236'' 700'''$ Duodecimalmafs im Decimalmafs?

Auflösung. Es ist

das Duodecimalm. $6^{\circ} 210' = 10578' = 10^{\circ} 578'$ D.M.

Ferner sind $236'' 700''' = 408508''''$ und

$$2985984 : 1000000 = 408508 : x \quad \begin{matrix} \text{Dd.c}''' & \text{D.c}''' \\ \text{Dd.c}''' & \text{D.c}''' \end{matrix} \quad [\S. 150.].$$

$$\text{Daher } x = \frac{408508000000}{2985984} = 136808,5026'''' \text{ Dec. M.}$$

$$= 136'' 808''' 502,6'''' \text{ oder}$$

$$= 136'' 808''' 503'''' \text{ Dec. Mafs.}$$

Es geben demnach $6^{\circ} 210' 236'' 700'''$ Duodecimalmafs im Decimalmafs $10^{\circ} 578' 136'' 808''' 503''''$.

5) Man soll 176° Duodecimalmafs in Decimalmafs verwandeln.

Auflösung. Es ist

$$1000 : 1728 = 176 : x \quad \begin{matrix} \text{Dd.c}^{\circ} & \text{D.c}^{\circ} \\ \text{Dd.c}^{\circ} & \text{D.c}^{\circ} \end{matrix} \quad [\S. 150.]$$

$$\text{und } x = 304,128^{\circ} \text{ Dec. Mafs.}$$

$$= 304^{\circ} 128' \gg \gg$$

Aufgaben zur Uebung.

1) Was geben 108° Duodecimalmafs im Decimalmafs? Antw. $186^{\circ} 624'$.

2) Es sollen $14^{\circ} 3' 87'' 793'''$ Decimalmafs in Duodecimalmafs verwandelt werden. — Sie geben im Duodecimalmafs $8^{\circ} 179' 151'' 1220''' 852,4''''$.

3) Man soll $3^{\circ} 80' 1340''$ Duodecimalmafs in Decimalmafs verwandeln. Man erhält $5^{\circ} 264' 775'' 462''' 963''''$.

§. 152.

Aufgabe. Ein rechtwinkliges Parallelepipeton zu berechnen.

Auflösung. Man messe die Länge, Breite und Höhe des zu berechnenden Parallelepipeton mit einer-

ley Mafs z. B. Fufs etc., und multiplicire diese drey Zahlenwerthe; oder man multiplicire die Grundfläche des Parallelepipedon mit seiner Höhe.

Beweis. (Fig. 155.) 1) Gesetzt AG sey das zu berechnende rechtwinklige Parallelepipedon, L , B , und H seine Länge, Breite und Höhe. Man vergleiche es mit dem Cubic-Fufs ag , worin Länge, Breite und Höhe, $l = b = h = 1$ ist. Nach §. 145. ist:

$$ag : AG = l . b . h : L . B . H.$$

$$= 1 : L . B . H.$$

$$= 1 : Basis \times H, \text{ (denn es ist } LB = Basis \text{); d. h. der Cubic-Fufs } ag \text{ ist so oft im}$$

Parallelepipedon AG enthalten, als die Einheit im Producte aus der Grundfläche und Höhe. Man findet also den körperlichen Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedon, wenn man seine Länge, Breite und Höhe durch einerley Mafs misst, und diese drey Zahlenwerthe multiplicirt, oder wenn man das Mafs der Grundfläche mit dem Mafse der Höhe des Parallelepipedon multiplicirt.

I. Zusatz. Jedes Parallelepipedon wird berechnet, indem man seine Grundfläche und Höhe mit einander multiplicirt. Denn jedes schiefwinklige Parallelepipedon gleicht einem rechtwinkligen mit gleich grosser Grundfläche und Höhe [§. 135. Zus. V.]. Da man nun ein rechtwinkliges Parallelepipedon durch das Product aus Grundfläche und Höhe berechnet [Aufg.], so gilt dieses auch von allen übrigen Parallelepipedon, indem die Grösse der in Rechnung kommenden Factoren stets dieselbe bleibt.

II. Zusatz. Ein Cubus oder Würfel wird berechnet, indem man das Mafs einer Seite desselben zum Cubus erhebt [Aufg.].

§. 153.

Aufgabe. Jedes Prisma zu berechnen.

Auflösung. Man multiplicire die Grundfläche des Prisma mit seiner Höhe.

Beweis. Jedes Prisma gleicht einem Parallelepi-
pedon mit gleich grosser Grundfläche und Höhe [§.
139. *Zus. IV.*], dieses wird berechnet indem man die
Grundfläche mit der Höhe multiplicirt [§. 152. *Zus. I.*],
folglich gilt dieses auch für alle Prismen.

Zusatz. Da der senkrechte Cylinder ein Prisma
mit einem Kreise zur Grundfläche ist, so ist sein In-
halt $M = r^2 \pi h$ (oder $\frac{1}{4} d^2 \pi h$), wenn r der Radius
der Grundfläche und h die Höhe des Cylinders aus-
drückt [Aufg.].

§. 154.

Aufgabe. Jede Pyramide zu berechnen.

Auflösung. Man multiplicire die Grundfläche der
Pyramide mit ihrer Höhe, und dividire das Product
durch drey.

Beweis. Jede Pyramide ist der dritte Theil eines
Prisma, das mit ihr gleichgrosse Grundfläche und Hö-
he hat [§. 143. *Zus. I.*]. Jedes Prisma wird berech-
net, indem man Grundfläche und Höhe multiplicirt;
folglich findet man auch den körperlichen Inhalt jeder
Pyramide, indem man das Product aus der Grundfläche
in die Höhe durch 3 dividirt.

Zusatz. Der cubische Inhalt eines jeden senkrech-
ten Kegels ist $= \frac{1}{3} r^2 \pi h$ (oder $\frac{1}{12} d^2 \pi h$) [Aufg., §.
122. 2. und §. 143. *Zus. II.*].

§. 155.

Aufgaben. 1) Ein Prisma dessen Grundfläche $16\frac{7}{8}\square''$,
und dessen Höhe $25'$ misst, soll berechnet wer-
den.

Auflösung. Es ist nach §. 153., wenn B die Grund-
fläche und H die Höhe des Prisma ausdrückt, das Pris-
ma oder

$$M = B \cdot H$$

$$= 16,07 \cdot 25$$

$$= 401,75^c$$

$$= 401^c 750^{c''}.$$

2) Ein Cylinder hat zur Grundfläche einen Kreis,
dessen Radius $5' 2''$ misst, seine Höhe beträgt $4'$. Wie

groß ist sein Inhalt?

Auflösung. Es ist nach §. 153. Zus.

$$\begin{aligned}\text{Cyl.} &= r^2 \pi h \\ &= [5,2]^2 \cdot 3,141 \cdot 4 \\ &= 330,73056^c \\ &= 330^c \ 730^{c''} \ 560^{c'''}. \end{aligned}$$

3) Eine Pyramide von der Höhe 8'' 4''' hat zur Grundfläche 3□' 8□'''. Wieviel beträgt ihr cubischer Inhalt?

Auflösung. Wenn B die Grundfläche und H die Höhe der Pyramide ausdrückt, so ist nach §. 154.

$$\begin{aligned}\text{Pyr.} &= \frac{1}{3} \cdot B \cdot H. \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3,0008 \cdot 0,84 \\ &= 0,840224^c \\ &= 840^{c''} \ 224^{c'''}. \end{aligned}$$

4) Wie groß ist der körperliche Inhalt eines Kegels, dessen Höhe 5' 2''' und dessen Radius der Grundfläche 1' 7'' beträgt?

Auflösung. Nach §. 154. Zus. ist

$$\begin{aligned}K. &= \frac{2}{3} r^2 \pi h \\ &= \frac{2}{3} \cdot [1,7]^2 \cdot 3,141 \cdot 5,02 \\ &= 15,1896666^c \\ &= 15^c \ 189^{c''} \ 666^{c'''} \ 600^{c''''}. \end{aligned}$$

§. 156.

Aufgabe. Den cubischen Inhalt einer parallel zur Grundfläche abgekürzten Pyramide zu berechnen.

Auflösung. (Fig. 125.) $BCDEbcde$ sey die abgekürzte Pyramide, $bd = a$ die kleinere und $BD = A$ die grössere Grundfläche, dann $fF = h$ die Höhe derselben. Die ganze Pyramide sey ABD , ihre Höhe AF , das unbekannte Stück der Höhe $Af = x$, folglich die ganze Höhe $AF = h + x$. Es ist demnach

$$\left. \begin{aligned}\text{Pyr. } ABD &= \frac{1}{3} A [h + x] \\ \text{Pyr. } Abd &= \frac{1}{3} ax \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} [\S. 154.]. \\ \text{folglich} \end{array}$$

$$\begin{aligned}\text{Pyr. } ABD - \text{Pyr. } Abd &= \frac{1}{3} A [h + x] - \frac{1}{3} ax, \text{ oder} \\ \text{abgek. Pyr.} &= \frac{1}{3} [Ah + (A - a)x]. \end{aligned}$$

Um den Werth von x zu finden setze man

$$bd : BD = Af^2 : AF^2 : [\S. 140.],$$

oder $a : A = x^2 : (h+x)^2$, und

$$\sqrt{a} : \sqrt{A} = x : h+x, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{h\sqrt{a}}{\sqrt{A}-\sqrt{a}} = \frac{h\sqrt{a}[\sqrt{A}+\sqrt{a}]}{A-a}. \text{ Daher}$$

$$\begin{aligned} \text{Abgek. Pgr.} &= \frac{1}{3} \left(Ah + \frac{[A-a]h\sqrt{a}[\sqrt{A}+\sqrt{a}]}{A-a} \right) \\ &= \frac{1}{3} h [A + \sqrt{a}[\sqrt{A}+\sqrt{a}]]. \end{aligned}$$

Beyspiel. Gesetzt $A = 25\text{'}^2$, $a = 9\text{'}^2$ und $h = 6'$.
Wie groß ist der cubische Inhalt dieser abgekürzten Pyramide?

Auflösung. Es ist nach obigem

$$\text{Abgek. Pgr.} = \frac{1}{3} h [A + \sqrt{a}(\sqrt{A} + \sqrt{a})]$$

$$= \frac{1}{3} 6 [25 + 3(5 + 3)]$$

$$= 2 [25 + 24]$$

$$= 98\text{'}^3.$$

§. 157.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines parallel zur Grundfläche abgekürzten senkrechten Kegels aus den beyden Radien R und r und aus seiner Höhe h zu berechnen.

Auflösung. (Fig. 124.) Gesetzt ABC sey der ganze Kegel, AD seine Höhe, das unbekannte Stück der Höhe $Ad = x$, also $AD = h + x$. Nun ist der Inhalt des Kegels

$$\begin{aligned} ABC &= \frac{1}{3} R^2 \pi [h+x] \\ \text{» » » } abc &= \frac{1}{3} r^2 \pi x \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} ABC &= \frac{1}{3} R^2 \pi [h+x] \\ abc &= \frac{1}{3} r^2 \pi x \end{aligned}} \right\} [\S. 154. Z.]$$

$$\text{dah. d. abgek. Kegel } bcBC = \frac{1}{3} R^2 \pi [h+x] - \frac{1}{3} r^2 \pi x$$

$$= \frac{1}{3} \pi [R^2 (h+x) - r^2 x]$$

$$= \frac{1}{3} \pi [R^2 h + (R^2 - r^2) x]$$

$$= \frac{1}{3} \pi [R^2 h + (R+r)(R-r)x].$$

Um den Werth von x zu finden setze man

$$R : r = h + x : x, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{r h}{R - r}. \text{ Folglich ist}$$

$$\begin{aligned}\text{Abgek. Kegel} &= \frac{1}{3} \pi [R^2 h + \frac{(R+r)(R-r) r h}{R-r}] \\ &= \frac{1}{3} \pi h [R^2 + (R+r) r] \\ &= \frac{1}{3} \pi h [R^2 + R r + r^2].\end{aligned}$$

Beyspiel. Gesetzt bey einem abgekürzten Kegel sey $R = 2' 3''$, $r = 1' 4''$ und $h = 7'$. Wie groß ist der körperliche Inhalt dieses Kegels?

Auflösung. Obiger Aufgabe gemäß ist:

$$\begin{aligned}\text{Abgek. Kegel} &= \frac{1}{3} h \pi [R^2 + R r + r^2]; \text{ daher} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 3,141 \cdot [5,29 + 3,22 + 1,96] \\ &= 7 \cdot 1,047 \cdot 10,47 \\ &= 76,73463^c \\ &= 76^c 734^c 630^{c'''}.\end{aligned}$$

§. 158.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt einer Kugel zu berechnen.

Auflösung. Wenn r den Radius und d den Durchmesser der Kugel ausdrückt; so ist die allgemeine Formel für die Kugel; oder

$$K = \frac{4}{3} r^3 \pi \text{ oder } = \frac{1}{6} d^3 \pi.$$

Beweis. Jede Kugel ist so groß als eine Pyramide, deren Grundfläche die Oberfläche der Kugel und deren Höhe der Radius Kugel ist [§. 146.]. Nun ist die Oberfläche der Kugel $= 4 r^2 \pi$ [§. 131.3.], folglich der körperliche Inhalt der Kugel selbst; oder

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{3} \cdot 4 r^2 \pi \cdot r \quad [\S. 154.] \\ &= \frac{4}{3} r^3 \pi \text{ oder } = \frac{1}{6} d^3 \pi, \text{ indem } r = \frac{1}{2} d, \\ \text{folglich } r^3 &= \frac{1}{8} d^3 \text{ ist.}\end{aligned}$$

1) *Beyspiel.* Der Radius einer Kugel mißt $5' 6''$. Wie groß ist ihr körperlicher Inhalt?

Auflösung. Es ist:

$$\begin{aligned}K &= \frac{4}{3} r^3 \pi \quad [\text{Aufg.}] \\ &= \frac{4}{3} \cdot [5,6]^3 \cdot 3,141 \\ &= 735,479808^c \\ &= 735^c 479^c 808^{c'''}.\end{aligned}$$

2. *Beyspiel.* Der Diameter einer Kugel sey 2' 7'' Duodecimalmafs. Wie grofs im Duodecimalmafs ausgedrückt ist ihr körperlicher Inhalt?

Auflösung. Man bringe das Mafs des Diameters auf die kleinste Benennung, nämlich auf Zoll, d. i. $2' 7'' = 31''$ Duodec. Mafs.

Es ist ferner $K = \frac{1}{8} d^3 \pi$ [Aufg.]

$$= \frac{1}{8} \cdot [31]^3 \cdot 3,141$$

$$= 15595,5885'' \text{ Duod. Mafs.}$$

$$= 9' 43'' 1017''' \text{ Duod. Mafs.}$$

I. Zusatz. Aus der Formel für die Kugel ist

$$r = \sqrt{\frac{3K}{4\pi}} \text{ und } d = \sqrt{\frac{6K}{\pi}}, \text{ wodurch man aus dem}$$

gegebenen cubischen Inhalte einer Kugel ihren Radius oder Diameter finden kann.

II. Zusatz. Sind R und r die Radien zweyer Kugeln K und k , so ist

$$K : k = \frac{4}{3} R^3 \pi : \frac{4}{3} r^3 \pi = R^3 : r^3, \text{ d. h.}$$

Alle Kugeln verhalten sich ihrem körperlichen Inhalte nach zueinander wie die Cubuse ihrer Radien [§. 149. Zus.].

§. 150.

Aufgabe. Ein Cylinder, eine Kugel und ein Kegel, wovon ersterer und letzterer zur Grundfläche den grölsten Kugelkreis der Kugel und zur Höhe den Durchmesser der Kugel haben, sind gegeben. Man soll das Verhältnifs bestimmen, in welchem sie ihrem körperlichen Inhalte nach zu einander stehen.

Auflösung und Beweis. Es ist:

$$\text{Cyl.} = \text{Bas. } h. [\S. 153. \text{Zus.}] = r^2 \pi \cdot 2r = 2r^3 \pi.$$

$$\text{Kugel} = \frac{4}{3} r^3 \pi [\S. 158.].$$

$$\text{Kegel} = \frac{1}{3} \text{Bas. } h. [\S. 154. \text{Zus.}] = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot 2r = \frac{2}{3} r^3 \pi.$$

Stellt man diese drey Körper in Proportion, so ist:

$$\text{Cyl.} : \text{Kug.} : \text{Keg.} = 2r^3 \pi : \frac{4}{3} r^3 \pi : \frac{2}{3} r^3 \pi$$

$$= 6 : 4 : 2$$

$$= 3 : 2 : 1, \text{ d. h.}$$

der in der Aufgabe gegebene Cylinder ist drey Mahl und die Kugel zwey Mahl so groß, als der Kegel.

§. 160.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines Kugelausschnitts [§. 124. 6.] zu berechnen.

Auflösung und Beweis. (Fig. 126.) Der Kugelausschnitt $FDGC$ ist einer Pyramide gleich, deren Grundfläche die krumme Oberfläche des Kugelabschnitts und deren Höhe der Radius der Kugel ist [§. 146. Zus.]. Es ist die krumme Oberfläche des Kugelabschnitts, wenn $DH = h$ bekannt ist, $2r\pi h$ [§. 131. 2.]; folglich der cubische Inhalt des Kugelausschnitts, oder

$$\text{Sect.} = \frac{1}{3} \text{Basis} \times h \quad [\S. 154. \text{Zus.}]$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2r\pi h \cdot r = \frac{2}{3} r^2 \pi h.$$

I. Zusatz. Ist $h = r$, so wird $\text{Sect.} = \frac{2}{3} r^3 \pi =$ der Halbkugel, und für $h = 2r$ wird $\text{Sect.} = \frac{4}{3} r^3 \pi =$ der ganzen Kugel [§. 158.].

II. Zusatz. (Fig. 126.) Da $\text{Sect.} = \frac{2}{3} r^2 \pi h = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot 2h$, und $r^2 \pi$ die Fläche eines größten Kugelkreises ist, so ist der Kugelausschnitt $FDGC$ auch einem Cylinder gleich, dessen Grundfläche der größte Kugelkreis der Kugel und dessen Höhe $= 2h =$ der doppelten Höhe des Kugelabschnitts ist.

§. 161.

Aufgabe. Den cubischen Inhalt eines Kugelabschnitts [§. 124. 4.] zu berechnen.

Auflösung und Beweis. (Fig. 126.) FDG sey der Kugelabschnitt, $DH = h$ seine Höhe, und r der Radius der Kugel. Der Kugelabschnitt gleicht dem Unterschiede zwischen dem körperlichen Inhalte des Kugelausschnitts $FDGC$ und dem des Kegels FCG , worin die Höhe $HC = r - h$, und $HG^2 = DH \cdot HE$ [§. 80. Zus. II.] $= h [2r - h]$ ist. Daher

$$\text{Segm. } FDG = \text{Sect. } FDGC - \text{Kegel } FGC$$

$$= \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{1}{3} HG^2 \cdot \pi \cdot HC \quad [\S. 160. \text{ u. } \S. 154. \text{ Z.}]$$

$$= \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{1}{3} \pi h [2r - h] [r - h]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{1}{3} \pi h [2 r^2 - 3 r h + h^2] \\
 &= \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{2}{3} r^2 \pi h + r h^2 \pi - \frac{1}{3} h^3 \pi \\
 &= r h^2 \pi - \frac{1}{3} h^3 \pi \\
 &= h^2 \pi [r - \frac{1}{3} h].
 \end{aligned}$$

I. Zusatz. Ein Kugelabschnitt gleicht einem Cylinder, dessen Grundfläche $h^2 \pi$, d. i. ein Kreis mit dem Radius h , und dessen Höhe $r - \frac{1}{3} h$ ist [Aufg.].

II. Zusatz. (Fig. 126.) Ein Kegel FDG , welcher mit dem Kugelabschnitte Grundfläche und Höhe gemein hat, ist

$$= \frac{1}{3} H G^2 \pi h = \frac{1}{3} h^2 \pi [2 r - h].$$

Es verhält sich demnach dieser Kegel zum Segmente, oder

$$\begin{aligned}
 \text{Keg. : Segm.} &= \frac{1}{3} h^2 \pi [2 r - h] : h^2 \pi [r - \frac{1}{3} h] \\
 &= 2 r - h : 3 r - h \\
 &= HE : HE + r, \text{ denn es ist} \\
 2 r - h &= HE, \text{ folglich auch } 3 r - h = 2 r - h + r \\
 &= HE + r.
 \end{aligned}$$

§. 162.

Aufgabe. Den Inhalt einer körperlichen Zone (Fig. 126.) $FGAB$ aus dem Radius der Kugel r und aus den Entfernungen der Ebenen der beyden Parallelkreise vom Pole der Kugel, nämlich aus $DH = h$ und $DC = H$, zu berechnen.

Auflösung und Beweis. Man betrachte die körperliche Zone $FGAB$ als den Unterschied der beyden Kugelabschnitte ADB und FDG . Es ist also die körperliche Zone $FGAB = \text{Segm. } ADB - \text{Segm. } FDG$

$$\begin{aligned}
 &= H^2 \pi [r - \frac{1}{3} H] - h^2 \pi [r - \frac{1}{3} h] [\S. 161.] \\
 &= \pi [H^2 r - \frac{1}{3} H^3 - h^2 r + \frac{1}{3} h^3] \\
 &= \pi [r (H^2 - h^2) + \frac{1}{3} (h^3 - H^3)] \\
 &= \pi [r (H + h)(H - h) + \frac{1}{3} (h^3 - H^3)].
 \end{aligned}$$

§. 163.

Aufgabe. (Fig. 126. a.) Den körperlichen Inhalt eines keilförmigen Kugelausschnittes $ABDE$ aus dem Radius der Kugel r und dem Neigungswinkel $DCE = \alpha$, den die beyden Ebenen ABD und ABE bilden, zu berechnen.

Auflösung und Beweis. Der Sector $ABDE$ ist der sovielte Theil der Kugel als der Winkel α , unter welchem sich seine Seitenflächen ABD und ABE neigen, ein Theil von 360° ist. Daher

Sect. $ABDE$: Kug. $= \alpha^\circ : 360^\circ$, woraus

$$\text{Sect. } ABDE = \text{Kug.} \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{4}{3} r^3 \pi \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} [\S. 158.].$$

Geometrische Aufgaben.

§. 1.

Wenn die Namen der *Addition*, *Subtraction*, *Multiplication*, *Division* etc. so allgemeine Operationen bezeichnen, wie sie in der Buchstaben - Rechnung genommen werden; so sind sie nicht blos arithmetische, sondern auch geometrische Operationen. In den algebraischen Ausdrücken kommen einstimmige und entgegengesetzte (positive und negative) Grössen vor. Diese einstimmigen, entgegengesetzten, positiven und negativen Grössen, sind nicht Grössen an sich, sondern in Beziehung aufeinander betrachtet. Diese Betrachtung findet auch bey Linien mit diesen Eigenschaftswörtern statt. Die Bestimmung des Einstimmigen und Entgegengesetzten bey Linien hängt von der einstimmigen oder entgegengesetzten Lage derselben ab; aber es ist willkührlich, welche Lage man positiv oder negativ nennen will; nur ergibt sich aus der Festsetzung der positiven Lage die negative, und aus der Festsetzung der negativen Lage die positive. Heißt die Senkrechte von einem Punkte oberhalb einer geraden Linie auf diese positiv, so heißt die Senkrechte von einem Punkte unterhalb der Linie auf diese negativ; und umgekehrt, heissen die letzteren Senkrechten positiv, so sind die ersteren negativ. Eben so, ist die Richtung einer geraden Linie von der Rechten gegen die Linke positiv, so heißt jene von der Linken gegen die Rechte in derselben Linie negativ; oder

auch umgekehrt, heisst man erstere negativ, so ist letztere positiv.

Es ist an sich klar, dass Einstimmiges sich vermehrt, vergrössert, Entgegengesetztes aber sich entweder ganz oder nur zum Theile tilget. (Fig. 156.) Die Erzeugung der geraden Linie AC durch die Bewegung eines Punctes in der Richtung von A nach C , und die Erzeugung von BC , als die Bewegung eines Punctes in derselben Richtung, sind einstimmig. Beyde zusammen geben AB . Die Erzeugung der geraden Linie AB , durch die Bewegung eines Punctes in der Richtung von A nach B , und die Erzeugung von BC , als die Bewegung eines Punctes in der Richtung von B gegen A , sind entgegengesetzt. Beyde zusammen gehen AC , wo also ein Theil des erzeugten AB durch die Erzeugung von BC aufgehoben wird.

Sollen die Buchstaben a, b , etc. gerade Linien bedeuten, so sind auch $a + b, a - b, \frac{ab}{c}$ etc. gerade Linien. Es bedeutet $\frac{ab}{c}$, die vierte geometrische Proportionall-Linie x , von den drey Linien c, a und b ; denn, wenn $c : a = b : x$ ist, so muss $x = \frac{ab}{c}$ seyn. Ebenso bedeutet ab nichts anderes, als die vierte geometrische Proportional-Linie y , zwischen einer angenommenen Masseinheit 1 und a und b , denn es ist $1 : a = b : y$. etc.

Wenn man den bekannten Zeichen der algebraischen Operationen einen so allgemeinen Sinn beylegt, so gibt dieß der Methode, Aufgaben durch Gleichungen aufzulösen, ebenfalls eine große Allgemeinheit, so, dass sie sich nicht allein auf arithmetische, sondern auch auf geometrische Aufgaben anwenden lässt. Nach Auflösung einer Gleichung, worin die Buchstaben Linien bedeuten, zeigt der letzte Ausdruck, worin die unbekannte Grösse von den bekannten abgesondert ist, durch welche geometrische Operationen,

und in welcher Ordnung die gesuchte Linie aus den gegebenen und bekannten Linien gefunden werden könne. Hätte man die Gleichung

$$x = \frac{mn}{a} + d;$$

so drückt sie aus, daß die Linie x gefunden werde, wenn man zu a , m und n die vierte geometrische Proportional-Linie sucht, und dazu die Linie d addirt. Man kann demnach die Auflösung geometrischer Aufgaben eben so, wie die Auflösung arithmetischer Aufgaben durch Gleichungen finden. Die Auflösungs-Methode ist ganz dieselbe; nur muß man die Fundamental-Gleichung einer geometrischen Aufgabe aus geometrischen Gründen herleiten, und deswegen muß derjenige, welcher diese Methode bey geometrischen Aufgaben in Anwendung bringen will, wenigstens mit den ersten Gründen der Geometrie bekannt seyn.

Das Hauptgesetz bey der Bildung der Fundamental-Gleichung ist: *Man nehme an, die gesuchte Grösse sey bereits gefunden, und drücke sie durch ein allgemeines Zeichen z. B., x etc. aus. Hierauf verbinde man sie, den Bedingungen der Aufgabe gemäß, mit den gegebenen Grössen, und entwikle nach den bekannten Reductions-Gesetzen der Gleichungen den Werth der unbekannten Grösse.*

Bey geometrischen Aufgaben schließt man durch die genaue Anschauung der Eigenschaften einer gegebenen Figur auf den Zusammenhang des Gegebenen mit dem Gesuchten; auch wird das Construiren passender Hilfslinien das Auffinden der Beziehungen oder des Zusammenhanges der unbekannten mit den bekannten Grössen bedeutend erleichtern, ja oft sogar nur das einzige Mittel für die Lösung der Aufg. seyn. Die algebraische Bezeichnung und Operation dient dazu, die nöthigen Schlüsse abzukürzen, und nach der Auflösung der Gleichung läßt sich das gefundene Resultat aus der alge-

braischen Zeichensprache in die geometrische Sprache wieder übersetzen.

Ehe wir zur analytischen Auflösung der verschiedenen geometrischen Probleme übergehen, wollen wir das Vorzüglichste anführen über die

*Construction von Grössen,
welche durch algebraische Ausdrücke
gegeben sind.*

§. 2.

Aufgabe. Man soll $a + b$ geometrisch construiren, wenn a und b gerade Linien bedeuten.

Auflösung. (Fig. 157.) Man ziehe eine gerade Linie MN , und trage darauf $MQ = a$ und an Q in derselben Richtung $QP = b$ auf; so ist $MP = a + b$.

I. Zusatz. Ist von den beyden Linien a und b eine z. B. b negativ, oder $a - b$ zu construiren, so mache man $AB = a$, und nehme in der entgegengesetzten Richtung, von B gegen A , $BC = b$; dann ist $AC = a - b$.

II. Zusatz. Ist $a - c$ zu construiren, die Linie c aber grösser als a , so ziehe man eine gerade Linie $DE = a$, und nehme auf der entgegengesetzten Richtung, von E nach D , $EF = c$; dann ist $FD = a - c$.

III. Zusatz. Für die Construction des Ausdrucks $a - b - c$ mache man $AB = a$, von B gegen A hin trage man $BC = b$, und in derselben Richtung an C die Linie $CG = c$; dann ist $AG = a - b - c$.

§. 3.

Aufgabe. Man soll die Ausdrücke $4a$, $\frac{2}{3}a$, $1\frac{3}{4}a$ construiren, wenn a eine gerade Linie ausdrückt.

Auflösung. 1) Um den Ausdruck $4a$ zu construiren trage man die gerade Linie a vier Mahl nach einer Richtung so auf, daß der Endpunct jedes vorhergehenden Theiles der Anfangspunct des folgenden ist.

2) Bey der Construction des Ausdrucks $\frac{2}{3}a$ theile

man die gerade Linie a zuerst nach §. 74. Zus. in drey gleiche Theile, und trage davon einen Theil zwey Mahl nach der positiven Richtung auf.

3) Um $1\frac{3}{4}a$ zu construiren, setze man an die gerade Linie a , nach der positiven Richtung hin, $\frac{3}{4}a$ an, dessen Construction man wie 2) findet.

§. 4.

Aufgabe. Man construire ab .

Auflösung. Der Ausdruck ab , wenn a und b gerade Linien sind, kann für sich allein genommen nicht construirt werden; denn a mit b multipliciren heisst, aus a eine Grösse erzeugen, wie b aus 1 entstanden ist. Gesetzt nun, a sey eine gerade Linie und b eine Zahl, so ist bekannt, wie b aus 1 entstanden ist, und ich kann das Product ab so construiren wie §. 3 gezeigt wurde. Ist aber b auch eine gerade Linie, so mangelt mir die Einheit, aus der b als erzeugt vorgestellt wird, folglich kann ich auch ab aus a nach b nicht ableiten.

Soll jedoch der Ausdruck ab , wenn a und b gerade Linien sind, construirbar werden, so muß noch ein Drittes, die Einheit (eine bestimmte Linie), gegeben seyn. In diesem Falle ist dann $1 : b = a : ab$ d. i. ab würde die vierte geometrische Proportional-Linie zu 1, b und a seyn. Die Construction von ab geschieht dann nach §. 74. 2. Man construire nämlich (Fig. 91.) einem Winkel BAC , nehme AD als die Einheit, und mache $AG = b$ und $DE = a$, so wird, wenn man DG und $EH \parallel DG$ zieht, $GH = ab$ für die Einheit AD .

§. 5.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{ab}{c}$ construirt.

Auflösung. Hier ist $cx = ab$ und

$$c : a = b : x.$$

Es ist also x die vierte geometrische Proportional-

Linie zu c , a und b . Die Construction dieses Ausdruckes gibt §. 74. 2.

Zusatz. Ist $x = a^2$ zu construiren, so setze man, indem man die Längeneinheit 1 als gegeben betrachtet,

$$x = \frac{a^2}{1}, \text{ daher}$$

$$1 \cdot x = a \cdot a \quad \text{und}$$

$$1 : a = a : x.$$

Man erhält also x als dritte geometrische Proportional-Linie zur Einheit 1 und a . Die Construction geschieht nach §. 74. 2., nur ist zu bemerken, daß für diesen Fall (Fig. 91.) $AG = DF = a$ gemacht werden muß.

§. 6.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{abc}{de}$ construirt.

Auflösung. Man setze $y = \frac{ab}{d}$, also ist

$$x = \frac{yc}{e} \quad \text{und} \quad ex = yc, \text{ mithin}$$

$$e : y = c : x,$$

folglich ist x die vierte Proportional-Linie von e , y und c . Der Ausdruck $y = \frac{ab}{d}$ läßt sich nach §. 5. und hierauf $x = \frac{yc}{e}$ nach demselben §. construiren.

Zusatz. Soll $x = \frac{abc}{m}$ construirt werden, so setze man $y = \frac{ab}{m}$, also $m : a = b : y$, und man findet y nach §. 5. Hierauf ist $x = y \cdot c$, dessen Construction nach §. 4. sich ergibt.

§. 7.

Aufgabe. Es soll $x = \sqrt{a}$ construirt werden.

Auflösung. Wenn $x = \sqrt{a}$ ist, so muß auch $x^2 = a$, und, wenn man wieder die Längeneinheit 1 zu Hülfe nimmt,

$$1 : x = x : a.$$

Es ist also x die mittlere geometrische Proportional-Linie zwischen der Längeneinheit 1 und der Linie a . Die Construction geschieht nach §. 81.

I. Zusatz. Soll $y = \sqrt{ab}$ construirt werden, so kann dieß ohne Hülfe der Längeneinheit nach §. 81. geschehen, denn es ist dann

$$a : y = y : b. \text{ etc.}$$

II. Zusatz. Dafs die Wurzel aus einer Grösse $+$ oder $-$ seyn kann, also bey $x = \sqrt{a}$ (Aufgabe) und $y = \sqrt{ab}$ [Zus. I.] x und y positiv oder negativ werden können, zeigt auch die Construction, indem die mittlere Proportional-Linie sowohl über als unter dem Diameter des Kreises, also in zwey entgegengesetzten Richtungen construirt werden kann.

§. 8.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{a^2 - b^2}{d}$ construirt.

Auflösung. $x = \frac{a^2 - b^2}{d} = \frac{[a+b][a-b]}{d}$, also

$$dx = [a+b][a-b] \text{ und}$$

$$d : a+b = a-b : x, \text{ d. h.}$$

x ist die vierte geometrische Proportional-Linie zu d , zur Summe der Linien a und b , und zur Differenz derselben.

§. 9.

Aufgabe. Man construire $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Auflösung. Man construire ein rechtwinkliges Dreyeck, dessen Katheten a und b sind, so wird die Hypotenuse desselben die gesuchte Seite x . Denn es ist nach §. 80. Zus. III. $x^2 = a^2 + b^2$, folglich

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

I. Zusatz. Soll $x = \sqrt{d^2 - a^2}$ construirt werden, so construire man einen rechten Winkel MNO (Fig. 65.) mache $NP = a$, beschreibe mit $PQ = d$ aus P

einen Kreisbogen, der den andern Schenkel des Winkels in Q schneidet; dann ist $NQ = x$ die verlangte Linie. Denn nach §. 80. Zus. III. ist

$$x^2 + a^2 = d^2, \text{ also auch } x^2 = d^2 - a^2 \text{ und } x = \sqrt{d^2 - a^2}$$

II. Zusatz. Würde im Ausdrucke $x = \sqrt{d^2 - a^2}$ die Linie a grösser als d , so ist x unmöglich, denn der Kreis, mit d aus P beschrieben, würde den andern Schenkel des Winkels nicht schneiden. [§. 17. Z.]

III. Zusatz. Soll $z = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ construirt werden, so suche man zuerst $q = \sqrt{a^2 + b^2}$ [Aufg.], sodann zum rechtwinkigen Dreyecke, dessen eine Kathete q und die andre c ist, die Hypotenuse, so ist diese die gesuchte Seite z . Denn es ist dann

$$\begin{aligned} z^2 &= q^2 + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2; \text{ folglich} \\ z &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

IV. Zusatz. Soll man $y = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ construiren, so kann dies dadurch geschehen, daß man zuerst $q = \sqrt{a^2 + b^2}$ sucht [Aufg.], und dann ein rechtwinkliges Dreyeck construirt, dessen Hypotenuse q und dessen eine Kathete c ist; dann muß die zweyte Kathete die verlangte Seite y seyn. Denn es ist dann im zuletzt construirten Dreyecke

$$\begin{aligned} y^2 &= q^2 - c^2, \text{ also auch} \\ &= a^2 + b^2 - c^2, \text{ und} \\ y &= \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}. \end{aligned}$$

V. Zusatz. Um $m = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$ zu construiren, betrachte man $m = \sqrt{a^2 + (\frac{b}{2})^2}$, welches mit obigem Ausdrucke einerley ist, und construire die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreyeckes, dessen beyde Katheten

a und $\frac{b}{2}$ sind. Die Construction von $n = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$

oder $n = \sqrt{a^2 - (\frac{b}{2})^2}$ ist wie im II. Zusatze.

§. 10.

Aufgabe. Man soll $x = \sqrt{2}$ construiren.

Auflösung. Hier muß wieder irgend eine Längeneinheit $= 1$, als, Maß gegeben seyn. Es wird also

$$x^2 = 2, \text{ folglich}$$

$$1 : x = x : 2.$$

Man finde demnach zur Länge 1 und zur Länge 2 die mittlere geometrische Proportional-Linie [§. 81.].

I. Zusatz. Soll man $x = \sqrt{3}$ construiren, so setze man wieder die Längeneinheit $= 1$, und es ist, aus

$$x = \sqrt{3}, x^2 = 3, \text{ folglich}$$

$$1 : x : 3, \text{ d. i.}$$

die Linie x ist zwischen den Längen 1 und 3 die mittlere Proportionale.

Auf ähnliche Art findet man die Construction von $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ etc.

II. Zusatz. Läßt sich die Zahl unter dem Wurzelzeichen in Factoren zerlegen, so wird die Construction etwas einfacher. Z. B. wenn $x = \sqrt{28}$, so ist auch $x^2 = 4 \cdot 7$, also

$$4 : x : 7 \text{ etc.}$$

§. 11.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{1}{2} a \sqrt{5}$ construirt.

Auflösung.

Es ist $x = \frac{1}{2} a \sqrt{5} = \sqrt{\frac{5}{4} a^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} a^2} = \sqrt{a^2 + [\frac{1}{2} a]^2}$, d. h. x ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreyeckes, dessen eine Kathete a und dessen andere Kathete $\frac{1}{2} a$ ist.

I. Zusatz. Um $x = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$ zu construiren, setze man $x = \frac{1}{2} a \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{4} a^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4} a^2} = \sqrt{a^2 - [\frac{1}{2} a]^2}$,

und es ist x die Kathete eines rechtwinkligen Dreyeckes, wovon a die Hypotenuse und $\frac{1}{2}a$ eine Kathete ist.

§. 12.

Aufgabe. Man soll $x = \frac{1}{2}a[\sqrt{5}-1]$ construiren.

Auflösung.

Es ist $x = \frac{1}{2}a[\sqrt{5}-1] = \frac{1}{2}a\sqrt{5} - \frac{1}{2}a$. Um diesen letzten Ausdruck zu construiren schneide man von der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreyeckes, dessen beyde Katheten a und $\frac{1}{2}a$ [§. 11.] sind, die Länge $\frac{1}{2}a$ ab.

§. 13.

Aufgabe. Man construire $x = \frac{a^2+b^2}{d}$.

Auflösung.

Man setze $a^2+b^2 = y^2$, so ist $x = \frac{a^2+b^2}{d} = \frac{y^2}{d}$.

Die Construction von $y = \sqrt{a^2+b^2}$ findet man aus §. 9., und die für $x = \frac{y^2}{d}$ aus §. 81. indem aus $x = \frac{y^2}{d}$ die Proportion $d : y : x$ entsteht.

Zusatz. Die Construction von $x = \frac{a^2-b^2}{d}$ kann man, ausser der in §. 8. gezeigten Methode, auch auf obige Art vornehmen, nur ist $a^2-b^2 = y^2$ zu setzen, und y zuerst nach §. 9. Zus. I. zu construiren.

§. 14.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{a^2b-bc^2}{ad} = \frac{ab}{d} - \frac{bc^2}{ad}$,

construirt.

Auflösung. Man setze $\frac{ab}{d} = y$, dessen Construction aus §. 5. bekannt ist. Das zweyte Glied $\frac{bc^2}{ad} = v$ wird so bestimmt:

Man setze $\frac{bc}{a} = z$, construire z nach §. 5., und dann ist $\frac{bc^2}{ad} = \frac{zc}{d} = v$, also kann auch v nach §. 5. construirt werden. Daher also

$$x = y - v. \text{ [§. 2. Zus. I.]}$$

§. 15.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{abc + def}{ab + cd}$ construirt.

Auflösung. Hier setze man $ab + cd = ay$; hieraus folgt: $y = \frac{ab + cd}{a} = b + \frac{cd}{a}$, und es kann nach dem Bisherigen y construirt werden [§. 5. u. 2.].

Nun setze man $x = \frac{abc + def}{ay} = \frac{bc}{y} + \frac{def}{ay}$, so lassen sich die beyden Längen $\frac{bc}{y}$ und $\frac{def}{ay}$ nach §. 5. 6. u. nach §. 2. also auch x selbst construiren.

§. 16.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{abc - def}{ab - cd}$ construirt.

Auflösung. Man setze hier $ab - cd = ay$, woraus $y = b - \frac{cd}{a}$. Daraus kann man y finden [§. 5. u. 2.].

Nun setze man $x = \frac{abc - def}{ay} = \frac{bc}{y} - \frac{def}{ay}$, so lassen sich beyde Längen $\frac{bc}{y}$ und $\frac{def}{ay}$ [nach §. 5. 6. u. 2.], folglich auch x construiren.

§. 17.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{abc^2 - a^2b^2}{abc + c^3}$ construirt.

Auflösung. Man setze $\frac{ab}{c} = y$, also $c : a = b : y$, und finde daraus y [§. 74. 2.]. Aus

$$x = \frac{abc^2 - a^2b^2}{abc + c^3} \text{ wird dann}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{ab [c^2 - ab]}{c [ab + c^2]} = \frac{cy [c^2 - cy]}{c [cy + c^2]} \\ &= \frac{c^2 y [c - y]}{c^2 [c + y]} = \frac{y [c - y]}{c + y}, \text{ also auch} \end{aligned}$$

$c + y : c - y = y : x$, woraus x nach §. 74. 2. construirt werden kann.

§. 18.

Aufgabe. Es werde $x = \sqrt{\frac{ab^2 + cd^2}{b + c}}$ construirt.

Auflösung. Hier setze man $\frac{ab^2 + cd^2}{b + c} = ay$, also $y = \frac{b^2}{b + c} + \frac{cd^2}{a[b + c]}$. Ferner setze man $\frac{b^2}{b + c} = z$, also $b + c : b = z$, woraus z nach §. 74. 2., wie §. 5. Zus. construirt werden kann.

In $\frac{cd^2}{a[b + c]} = v$ setze man $\frac{cd}{a} = p$ und construire p nach §. 5. Es ist dann $\frac{cd^2}{a(b + c)} = \frac{pd}{b + c} = v$, woraus $b + c : p = d : v$ ist, und v wie oben nach §. 74. 2. construirt werden kann.

Es ist demnach $y = z + v$ und $ay = a[z + v]$, mithin $x = \sqrt{a(z + v)}$ oder $x^2 = a[z + v]$, also auch $a : x : z + v$ d. h.

x ist die mittlere geometrische Proportional-Linie zwischen a und $z + v$ [§. 81.]. Da z und v durch die Längen a, b, c und d bestimmt wurden, so ist also auch x die gesuchte Länge nach dem Mafse der Längen a, b, c, d .

§. 19.

Aufgabe. Es werde $x = \sqrt{ac + bd}$ contruirt.

Auflösung. Hier setze man $bd = ay$, also $y = \frac{bd}{a}$ und es wird dann

$$x = \sqrt{ac + ay}$$

$$x = \sqrt{a(c + y)}.$$

Nun läßt sich $y = \frac{bd}{a}$, indem $a : b = d : y$ ist, nach §. 74. 2. construiren. Da ferner auch $x^2 =$

$a[c + y]$, also auch $a : x : c + y$ ist, kann x nach §. 81. als mittlere geometrische Proportional-Linie zwischen a und $c + y$ construirt werden.

§. 20.

Aufgabe. Man soll $x = \sqrt{[a^2 + bc + \frac{def}{g}]}$ construiren.

Auflösung. Man setze $bc = m^2$, so findet man $m = \sqrt{bc}$, und dieses ist nach §. 81. zu construiren. Ferner setze man $\frac{def}{g} = n^2$, also $n = \sqrt{\frac{def}{g}}$. Hier suche man zuerst $\frac{de}{g}$ [§. 5.], sodann die mittlere geometrische Proportional-Linie n zwischen $\frac{de}{g}$ und f , indem $n^2 = \frac{def}{g}$, also $f : n : \frac{de}{g}$ ist [§. 81.].

Hat man nun m und n gefunden, so ist $x = \sqrt{[a^2 + bc + \frac{def}{g}]} = \sqrt{[a^2 + m^2 + n^2]}$ nach §. 9. Zus. III. leicht zu construiren:

§. 21.

Aufgabe. Man construire $x = \sqrt{\frac{abcd}{eg}}$.

Auflösung. Man setze $cd = m^2$ und $eg = n^2$; so läßt sich m aus cd und n aus eg construiren [§. 7. Zus. I.] Es ist demnach.

$$x = \sqrt{\frac{abcd}{eg}} = \sqrt{[ab \frac{m^2}{n^2}]} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{\frac{m^2}{n^2}} = \frac{m}{n} \sqrt{ab}.$$

Setzt man endlich $\sqrt{ab} = y$, so läßt sich y leicht nach §. 81 construiren, und es ist $x = \frac{my}{n}$, also auch $n : m = y : x$, folglich x selbst durch Construction aus §. 74. 2. zu finden.

Vermischte geometrische Aufgaben.

§. 22.

Aufgabe. In einem Parallelogramme mißt die Grundlinie $20' 7''$ und die Höhe $10' 3''$. Man soll ein

anderes von gleichem Inhalte mit einer 25' langen Grundlinie angeben. Wie groß ist die Höhe zu nehmen?

Auflösung. Die Höhe des verlangten Parallelogramms sey x , sodann wird sein Inhalt, indem seine Grundlinie 25' beträgt, $= 25 \cdot x$ [§. 97.]. Der Inhalt des gegebenen Parallelogramms ist $= 20,7 \cdot 10,3$. Da nun gemäß der Aufgabe beyde Parallelogramme gleich groß seyn sollen, so muß

$$25 x = 20,7 \cdot 10,3, \text{ also}$$

$$x = \frac{20,7 \cdot 10,3}{25} = 8' 2'' \text{ seyn.}$$

Es ist demnach die Höhe des verlangten Parallelogramms 8' 2''.

§. 23.

Aufgabe. (Fig. 158.) Im rechtwinkligen Dreyecke ABC ist $AB = 307'$, die Hypotenuse AC aber um 102' grösser, als die andere Kathete BC . Wie groß ist BC und AC ?

Auflösung. Im rechtwinkligen Dreyecke ABC sey $AB = 307' = a$, die unbekannte Kathete $BC = x$, folglich die Hypotenuse $AC = BC + 102' = x + n$, wenn $n = 102'$ den Unterschied zwischen der Hypotenuse und der unbekannten Kathete bezeichnet. Nach §. 80. Zus. III. ist

$$AC^2 = AB^2 + BC^2, \text{ oder}$$

$$[x + n]^2 = a^2 + x^2, \text{ folglich}$$

$$x^2 + 2 n x + n^2 = a^2 + x^2$$

$$2 n x = a^2 - n^2$$

$$x = \frac{a^2 - n^2}{2 n} = \frac{[a + n][a - n]}{2 n}.$$

$$\text{Die Hypotenuse } AC = x + n = \frac{a^2 - n^2}{2 n} + n = \frac{a^2 + n^2}{2 n}.$$

Da nun der Angabe gemäß $a = 307'$ und $n = 102'$ ist, so wird

$$\begin{aligned} BC = x &= \frac{(307 + 102)(307 - 102)}{2 \cdot 102} \\ &= \frac{409 \cdot 205}{204} = 411'. \end{aligned}$$

Es ist also die andere Kathete $BC = 411'$ und die Hypotenuse $AC = BC + 102 = 513'$.

§. 24.

Aufgabe. (Fig. 158.). Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreyeckes ABC sey $60000 \square'$ und die eine Kathete BC um $100'$ grösser als die andere. Wie gross ist jede?

Auflösung. Gesetzt $AB = x$, so ist $BC = x + n$, wenn $n = 100$ den Unterschied beyder Katheten ausdrückt; folglich der Inhalt ($M = 60000 \square'$) des $\triangle ABC$ nach §. 97. Zus. II., oder

$$M = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} x [x + n], \text{ also}$$

$$2M = x^2 + nx$$

$$x^2 + nx + \left[\frac{n}{2}\right]^2 = 2M + \frac{n^2}{4}$$

$$x = -\frac{n}{2} \pm \sqrt{2M + \frac{n^2}{4}}$$

$$= -\frac{n}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{8M + n^2} = \frac{-n \pm \sqrt{8M + n^2}}{2}$$

$$\text{Daher } BC = x + n = \frac{n \pm \sqrt{8M + n^2}}{2}.$$

Substituirt man die Zahlenwerthe, so ist

$$x = \frac{-100 \pm \sqrt{480000 + 10000}}{2} = -50 \pm \frac{700}{2}$$

$$= -50 \pm 350 = 300'.$$

Also ist die eine Kathete $= 300'$ die andere $= 400'$.

Da $x = -50 \pm 350 = 300$ oder -400 , also $x + n = 300 + 100 = 400$ oder $= -400 + 100 = -300$ ist, so drückt diess aus, dafs die beyden Katheten, ausser den Werthen $300'$ und $400'$, auch noch die von $-400'$ und $-300'$ d. i. eine entgegengesetzte Lage haben können, wie z. B. $BE = 400'$, entgegengesetzt von AB , und $BD = 300'$, entgegengesetzt von BC (mithin auch das $\triangle DBE$ selbst entgegengesetzt dem $\triangle ABC$).

§. 25.

Aufgabe. In einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreyecke ist die Summe aller Seiten $= a$; wie gross jede?

Auflösung. Ist ein Schenkel dieses Dreyeckes $= x$, so ist die Hypotenuse $= a - 2x$ und nach §. 80. *Zus. III.*

$$[a - 2x]^2 = x^2 + x^2$$

$$a^2 - 4ax + 4x^2 = 2x^2$$

$$2x^2 - 4ax = -a^2$$

$$x^2 - 2ax = -\frac{1}{2}a^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}a^2$$

$$x - a = \pm \sqrt{\frac{1}{2}a^2} = \pm \frac{1}{2}a \sqrt{2}$$

$$x = a \pm \frac{1}{2}a \sqrt{2} = a [1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}].$$

Für diese Aufgabe ist $x = a [1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}]$.

Es ist also jede Kathete $a [1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}]$, folglich die Hypotenuse $h = \sqrt{(x^2 + x^2)}$ [§. 80. *Zus. III.*]

$$= x \sqrt{2} = a [1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}] \sqrt{2}$$

$$= a [\sqrt{2} - 1].$$

Sind diese drey Werthe der beyden Katheten und der Hypotenuse richtig, so muß ihre Summe wieder a geben. Nämlich

$$h + x + x = a [\sqrt{2} - 1] + 2a [1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}]$$

$$= a \sqrt{2} - a + 2a - a \sqrt{2} = a.$$

Construction. (Fig. 159. a.) Gesetzt $MN = a$ sey der gegebene Perimeter. Man ziehe eine gerade Linie AQ , mache $AB = a$, und $BC = \frac{1}{2}a$, beschreibe über AC einen Halbkreis, und errichte in B auf AC die Senkrechte DB . Endlich beschreibe man mit BD aus B einen Kreisbogen, der AB in E schneidet, so ist AE die verlangte Kathete x , woraus man dann leicht das in der Aufgabe gegebene Dreyeck selbst construiren kann.

Beweis.

Es ist gemäß der Constr. $BD = \sqrt{AB \cdot BC} = \sqrt{\frac{1}{2}a^2} = \frac{a}{2} \sqrt{2} = BE$, ferner $AE = AB - EB = a - \frac{a}{2} \sqrt{2} = x$. [Aufl.]

(Fig. 159. b.) Bey der Construction von h setze man MN und $NO = a$ unterm rechten Winkel zusammen, ziehe MO , und mache $PO = NO$, so ist $MP = MO - PO = a [\sqrt{2} - 1] = h$.

§. 26.

Aufgabe. (Fig. 160.) Die drey Seiten eines Dreyeckes sind gegeben, nämlich $AB=c$, $AC=b$ und $BC=a$. Man soll daraus den Inhalt des Dreyeckes finden.

Auflösung. Man fälle die Senkrechte AD .

Es ist $\Delta ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} a \cdot AD$.

Um AD zu suchen, betrachte man die beyden rechtwinkligen Dreyecke ABD und ADC , und setze $BD=x$, folglich $DC=a-x$. Es ist nach §. 80.

Zus. III. $AD^2 = AB^2 - BD^2 = c^2 - x^2$

$$AD^2 = AC^2 - DC^2 = b^2 - [a-x]^2$$

folgl. $c^2 - x^2 = b^2 - [a-x]^2$

$$c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \text{ ist.}$$

Daher $AD^2 = c^2 - x^2 = (c+x)(c-x)$

$$= \left[c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right] \left[c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right]$$

$$= \frac{[2ac + a^2 + c^2 - b^2][2ac - a^2 - c^2 + b^2]}{4a^2}$$

$$= \frac{[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2]}{4a^2}$$

$$= \frac{[a+b+c][a+c-b][a+b-c][b+c-a], \text{ also,}}{4a^2}$$

$$AD = \frac{\sqrt{[a+b+c][b+c-a][a+c-b][a+b-c]}}{2a}$$

Folglich das Dreyeck oder

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} a \cdot AD$$

$$= \frac{1}{2} a \frac{\sqrt{[(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)]}}{2a}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{[a+b+c][b+c-a][a+c-b][a+b-c]}.$$

I. Zusatz. Ist das Dreyeck gleichschenkelig, also $b=c$, so wird aus obiger Formel folgende:

$$\Delta ABC = \frac{1}{4} \sqrt{[a+2b][2b-a] a \cdot a]}$$

$$= \frac{a}{4} \sqrt{[2b+a][2b-a]}.$$

II. Zusatz. Ist das Dreyeck gleichseitig, d. i. $a=b=c$, so wird aus obiger Formel folgende:

$$\Delta ABC = \frac{1}{4} \sqrt{[3 a. a. a. a.]}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{3 a^4} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}.$$

§. 27.

Aufgabe. (Fig. 161.) Eine gerade Linie AB soll im äussern und mittlern Verhältnisse (in extrema et media ratione) getheilt werden, d. h. so, dass sich die ganze Linie zum grössern Theile eben so verhalte, wie dieser grössere Theil zum kleineren, folglich der grössere Abschnitt (Theil) die mittlere geometrische Proportional-Linie zwischen der ganzen Linie und ihrem kleineren Theile wird.

1) *Auflösung.* (synthetisch) An AB setze man die Senkrechte $BD = \frac{1}{2} AB$, ziehe AD , und mache $DE = BD$ und $AC = AE$, so ist

$$AB : AC : CB.$$

Beweis.

Es ist $AD^2 = AB^2 + BD^2$ [§. 80. Zus. III,]

Nun ist $AD = AE + ED = AC + DB$, folglich auch $[AC + DB]^2 = AB^2 + BD^2$, oder

$$AC^2 + 2.BD.AC + BD^2 = AB^2 + BD^2, \text{ und da } 2 BD = AB \text{ ist,}$$

$$AC^2 + AB.AC = AB^2, \text{ also}$$

$$AC^2 = AB^2 - AB.AC$$

$$[AB - AC]^2 = AB[AB - AC], \text{ oder}$$

$$AC^2 = AB.CB, \text{ folglich auch}$$

$$AB : AC : CB.$$

2) *Auflösung.* (analytisch) Gesetzt die Auflösung sey geschehen, und AC und CB seyen die beyden verlangten Theile. Man setze $AC = x$, also $CB = AB - x = n - x$, wenn $n = AB$ ist.

Es soll dann:

$$n : x = x : n - x \text{ seyn, folglich}$$

$$x^2 = n^2 - nx \text{ oder}$$

$$x^2 + nx = n^2, \text{ woraus}$$

$$x = -\frac{1}{2}n \pm \sqrt{[\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n^2]}$$

$$= \frac{1}{2}n [\sqrt{5} - 1], \text{ indem hier nur das}$$

Zeichen $\pm$ vor der Wurzelgröſſe genommen werden kann.

Um obigen Ausdruck, $x = \frac{1}{2} n [\sqrt{5} - 1]$, zu construiren, nehme man jenen, nähmlich

$$x = -\frac{1}{2} n + \sqrt{[n^2 + \frac{1}{4} n^2]}$$

$$= \sqrt{[n^2 + (\frac{1}{2} n)^2]} - \frac{1}{2} n, \text{ d. h. man construire } \sqrt{[n^2 + (\frac{1}{2} n)^2]} \text{ (d. i. die Hypotenuse } AD \text{ eines rechtwinkligen Dreyekes } ABD, \text{ dessen eine Kathete } AB = n \text{ und dessen andere } BD = \frac{1}{2} n \text{ ist) und nehme davon } DE = \frac{1}{2} n \text{ weg, so ist } AE = AC = AD - DE = \sqrt{[a^2 + \frac{1}{4} a^2]} - \frac{1}{2} n = x; \text{ folglich } AE \text{ oder } AC \text{ der grössere Abschnitt.}$$

Man theilt demnach eine gerade Linie $AB = n$ nach dem äussern und mittlern Verhältnisse indem man auf ihr ihre Hälfte $DB = \frac{1}{2} n$ senkrecht errichtet, sodann AD zieht, und davon AE dadurch abschneidet, indem man mit DB aus D einen Kreisbogen EB zieht. Es ist dann AE , oder auch AC , wenn man mit AE aus A den Bogen EC beschreibt, der grössere und CB der kleinere verlangte Theil der Linie AB .

§. 28.

Aufgaben. (Fig. 162.) Aus der Seite $AB = a$ eines regulären Vieleckes in einem Kreise, und dem Radius r dieses Kreises die Seite $FG = b$ des gleichnamigen regulären Vieleckes um den Kreis zu finden.

Auflösung. Gesetzt $AB = a$ sey die Seite des regulären n Eckes im Kreise. Man fälle CD senkrecht auf AB , und construire die Tangente FG für den Punct D , welche durch die verlängerten Radien AC und BC in F und G geschnitten wird. Die Linie FG ist dann die verlangte Seite des regulären n Eckes um den Kreis.

Es ist $\triangle FGC \sim \triangle ABC$, dann

$$CE = \sqrt{[r^2 - \frac{1}{4} a^2]} = \frac{1}{2} \sqrt{[4r^2 - a^2]}, \text{ ferner}$$

$$AB : FG = CE : CD \quad [\S. 83.], \text{ oder}$$

$$a : b = \frac{1}{2} \sqrt{[4r^2 - a^2]} : r, \text{ woraus}$$

$$b = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}} = \frac{2ar\sqrt{4r^2 - a^2}}{4r^2 - a^2}$$

$$b = \frac{2ar\sqrt{(2r+a)(2r-a)}}{[2r+a][2r-a]}$$

Zusatz. Will man umgekehrt aus der Seite $FG=b$ eines regulären n Eckes um den Kreis und aus dessen Radius r die Seite $AB=a$ des regulären n Eckes im Kreise finden, so ist aus obiger Proportion

$$AB : FG \equiv CE : CD \text{ oder}$$

$$a : b \equiv \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2} : r$$

$$a = \frac{b}{r} \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2}$$

$$\frac{a^2 r^2}{b^2} = r^2 - \frac{1}{4}a^2$$

$$\frac{a^2 r^2}{b^2} + \frac{a^2}{4} = r^2$$

$$4a^2 r^2 + a^2 b^2 = 4b^2 r^2$$

$$a^2 [4r^2 + b^2] = 4b^2 r^2$$

$$a = \sqrt{\frac{4b^2 r^2}{4r^2 + b^2}} = \frac{2br}{\sqrt{4r^2 + b^2}}$$

$$= \frac{2br\sqrt{4r^2 + b^2}}{4r^2 + b^2},$$

§. 29.

Aufgabe. Der Radius r eines Kreises ist gegeben. Man soll die Seite des regulären Dreyeckes in und um den Kreis bestimmen.

Auflösung. 1) Es ist nach §. 65, die Seite eines regulären Sechseckes im Kreise dem Radius gleich; ferner nach §. 86. *Zus. II.*

$$a = \frac{b}{r} \sqrt{4r^2 - b^2}$$

die Formel, um aus der Seite eines regulären $2n$ Eckes im Kreise, dessen Radius r ist, die des regulären n Eckes in demselben Kreise zu bestimmen. Es ist also für die Seite des regulären Dreyeckes im Kreise

$$a = \frac{b}{r} \sqrt{4r^2 - b^2} \text{ und, da } b=r \text{ ist,}$$

$$= \frac{r}{r} \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}.$$

Für den Radius $r = 1$ ist $a = 1,73205 \dots$

Um die Seite des regulären Dreyeckes im Kreise, oder $a = r\sqrt{3}$, zu construiren, folgere man, aus

$$a = r\sqrt{3}$$

$$a^2 = 3r^2. \text{ Es ist demnach}$$

$3r : a : r$, d. h. die verlangte Seite des Dreyeckes ist die mittlere geometrische Proportional-Linie zwischen dem dreyfachen und einfachen Radius. Ist z.B. Fig. 163. $AB = r$ der Radius des Kreises, so verlängere man AB , und trage auf die Verlängerung $BC = CD = DE = r$ auf, beschreibe endlich über AE einen Halbkreis, und errichte in D die Senkrechte DF , so ist diese die Seite des verlangten Dreyeckes [§. 80. Zus. II.] [geom. Aufg. §. 10. Zus. I.].

2) Um die Seite der regulären Dreyeckes um den Kreis zu finden, nehme man aus §. 28.

$$b = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}, \text{ wo } a = r\sqrt{3} \text{ [1.] ist,}$$

$$\text{also } b = \frac{2r^2\sqrt{3}}{\sqrt{4r^2 - 3r^2}} = \frac{2r^2\sqrt{3}}{r} = 2r\sqrt{3} \text{ d.h.}$$

die Seite des regulären Dreyeckes um den Kreis ist doppelt so groß als die des regulären Dreyeckes im Kreise.

Für den Radius $r = 1$ ist $b = 3,4641 \dots$

§. 30.

Aufgabe. Der Radius eines Kreises ist gegeben. Man soll die Seite des Quadrates in, und die des Quadrates um den Kreis finden.

Auflösung. 1) Die Seite des Quadrates im Kreise, dessen Radius r ist, ist die Sehne eines Quadranten, folglich [Fig. 81.], wenn $CB = x$ und $CI = IB = r$ ist,

$$CB^2 = CI^2 + IB^2 \text{ [§. 80. Zus. III.], also}$$

$$x = \sqrt{r^2 + r^2} \\ = r\sqrt{2}.$$

Für den Radius $= 1$, ist $x = 1,4142 \dots$

Die Construction von $x = r\sqrt{2}$ ist nach §. 10. der geom. Aufg. nicht schwierig.

2) Die Seite des Quadrates um den Kreis ist der Diameter $\equiv 2r$.

§. 31.

Aufgabe. Die Seite des regulären Zehneckes im Kreise, dessen Radius r ist, zu finden, und zu construiren.

Auflösung. (Fig. 164.) Gesetzt $AB \equiv x$ sey die Seite des regulären Zehneckes im Kreise und $AK \equiv BK \equiv r$ Radien. Man verlängere AB über B , und mache die Verlängerung $BD \equiv BK \equiv r$, und ziehe DK . Indem AB Sehne eines Bogens ist, welcher der zehnte Theil der ganzen Peripherie ist, so muß $o \equiv \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$, also $m \equiv \frac{1}{2} [180^\circ - 36^\circ] = 72^\circ \equiv n$ seyn.

Da $BD \equiv BK$ ist, so muß auch $p \equiv q \equiv \frac{1}{2} m \equiv 36^\circ$ seyn. Es ist also

$$p \equiv o, \text{ ferner}$$

$$n \equiv n, \text{ folglich}$$

$$\triangle ADK \sim \triangle ABK \text{ [§. 76.]. Daher}$$

$$AD : AK \equiv AK : AB, \text{ oder}$$

$$x + r : r \equiv r : x, \text{ folglich}$$

$$x^2 + rx \equiv r^2$$

$$x^2 + rx + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \equiv r^2 + \frac{r^2}{4} \equiv \frac{5}{4} r^2$$

$$x + \frac{r}{2} \equiv \frac{r}{2} \sqrt{5}$$

$$x \equiv \frac{r}{2} \sqrt{5} - \frac{r}{2} \equiv \frac{r}{2} [\sqrt{5} - 1], \text{ wel-}$$

cher Ausdruck sich nach §. 12. oder §. 27. 2. leicht construiren läßt. Man errichte nämlich Fig. 165. auf dem Endpunkte des Radius $MN \equiv r$ die Senkrechte $NO \equiv \frac{1}{2} r$, beschreibe mit NO den Bogen QN , so ist MQ oder MP , wenn man mit MQ den Bogen PR beschreibt, die verlangte Seite x .

Es ist klar, daß durch diese Construction der Radius $MN \equiv r$ nach dem äussern und mittleren Verhältnisse getheilt ist [§. 27.], und daß sein grösserer

Abschnitt $MR = MQ = MP = x$ die Seite des regulären Zehneckes im Kreise ist.

§. 32.

Aufgabe. Die Seite des regulären Zehneckes um einen Kreis zu finden, dessen Radius r ist.

Auflösung. Nach §. 28. [geom. Aufg.] ist aus der Seite a eines regulären n Eckes im Kreise die Seite des regulären n Eckes um den Kreis oder

$$b = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}, \text{ oder } b^2 = \frac{4a^2 r^2}{4r^2 - a^2}.$$

Da für das reguläre Zehneck $a = \frac{r}{2} [\sqrt{5} - 1]$, folglich $a^2 = \frac{r^2}{4} [5 - 2\sqrt{5} + 1] = \frac{r^2}{2} [3 - \sqrt{5}]$, dann

$4a^2 r^2 = 2r^4 [3 - \sqrt{5}]$; ferner

$$4r^2 - a^2 = 4r^2 - \frac{r^2}{2} [3 - \sqrt{5}] = 4r^2 - \frac{3}{2}r^2 + \frac{r^2}{2}\sqrt{5} = \frac{r^2}{2} [5 + \sqrt{5}] \text{ ist, so muß}$$

$$b^2 = \frac{4a^2 r^2}{4r^2 - a^2} = \frac{2r^4 [3 - \sqrt{5}]}{\frac{r^2}{2} [5 + \sqrt{5}]} = \frac{4r^2 [3 - \sqrt{5}][5 - \sqrt{5}]}{25 - 5}$$

$$= \frac{1}{5}r^2 [20 - 8\sqrt{5}] = \frac{4}{5}r^2 [5 - 2\sqrt{5}], \text{ also}$$

$$b = 2r \sqrt{1 - \frac{2}{5}\sqrt{5}}. \text{ seyn.}$$

Die Construction der Seite des regulären Zehneckes um den Kreis kann am Einfachsten durch die Seite des regulären Zehneckes im Kreise auf die Art geschehen, wie überhaupt in der Auflösung des §. 28. gezeigt wurde.

§. 33.

Aufgabe. Die Seite des regulären Fünfeckes im Kreise zu suchen und zu construiren.

Auflösung. Es ist bekannt, daß die Seite des regulären Zehneckes im Kreise oder $b = \frac{r}{2} [\sqrt{5} - 1]$ ist [§. 31. geom. Aufg.]. Ferner kann man durch

$$a = \frac{b}{r} \sqrt{4r^2 - b^2} \quad [\S. 86. \text{Zus. II.}]$$

aus der Seite b des regulären $2n$ Eckes die des regulären n Eckes in demselben Kreise oder a finden. Da in dieser Aufgabe $b = \frac{r}{2} [\sqrt{5} - 1]$ die Seite des regu-

lären Zehneckes ist, so erhält man durch Substitution des Werthes von b in obige Formel die Seite des regulären Fünfeckes.

Es ist nämlich, da $a = \frac{b}{r} \sqrt{4r^2 - b^2}$ ist, auch

$$a^2 r^2 = b^2 [4r^2 - b^2].$$

Nun ist $b^2 = \frac{r^2}{4} [\sqrt{5} - 1]^2 = \frac{r^2}{2} [3 - \sqrt{5}]$, ferner

$$4r^2 - b^2 = 4r^2 - \frac{r^2}{2} [3 - \sqrt{5}] = \frac{r^2}{2} [5 + \sqrt{5}].$$

Daher $a^2 r^2 = \frac{r^2}{2} [3 - \sqrt{5}] \cdot \frac{r^2}{2} [5 + \sqrt{5}]$

$$a^2 = \frac{r^2}{4} [10 - 2\sqrt{5}] = \frac{r^2}{2} [5 - \sqrt{5}], \text{ folg-}$$

lich
$$a = r \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.$$

Construction. (Fig. 166.) Man errichte $CB = r$ senkrecht auf der Mitte des Diameters AF , halbire BF in D , und beschreibe mit der von C nach D gezogenen geraden Linie den Kreisbogen CE , so ist EB die Seite des regulären Zehneckes und CE die des regulären Fünfeckes im Kreise um B .

Beweis. Da $BC = r$, $BD = \frac{1}{2}r$ und $CD = \frac{r}{2}\sqrt{5}$, so ist $EB = ED - BD = CD - BD = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}[\sqrt{5} - 1]$ die Seite des regulären Zehneckes [§. 31].

Ferner ist $CE^2 = BC^2 + EB^2$

$$= r^2 + \frac{r^2}{4} [5 - 2\sqrt{5} + 1]$$

$$= r^2 + \frac{r^2}{2} [3 - \sqrt{5}]$$

$$= \frac{5}{2}r^2 - \frac{r^2}{2}\sqrt{5}$$

$$= r^2 \left[\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right], \text{ folglich}$$

$$CE = r \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \text{ die Seite des regu-}$$

lären Fünfeckes.

§. 34.

Aufgabe. Um einen Kreis, dessen Halbmesser r ist, werde ein zweyter concentrischer beschrieben, so, daß der Flächeninhalt des Ringes zwischen beyden

Kreisen $= m$ werde; es ist der Radius des grössern Kreises zu berechnen.

Auflösung. Ist x der Radius des zu suchenden Kreises, so ist $x^2 \pi$ seine Fläche. Der Ring, dessen Inhalt $= m$ werden soll, gleicht dem Unterschiede zwischen dem grösseren und kleineren Kreise, daher

$$x^2 \pi - r^2 \pi = m, \text{ woraus}$$

$$x = \sqrt{\left[\frac{m}{\pi} + r^2\right]} \text{ ist.}$$

Beyspiel. Ist $r = 39' 8''$, $m = 385 \square'$, so wird $x = 41' 3''$.

§. 35.

Aufgabe. Ein Dreyeck, dessen Grundlinie $= b$, und dessen Höhe $= h$ gegeben ist, soll in ein Parallelogramm verwandelt werden, dessen Grundlinie m ist; man suche die dazugehörige Höhe x .

Auflösung. Die Dreyecksfläche ist $= \frac{1}{2}bh$, die Fläche des Parallelogrammes mx , folglich ist

$$mx = \frac{1}{2}bh \text{ und}$$

$$x = \frac{bh}{2m} \text{ die gesuchte Höhe. Will}$$

man die Höhe construiren so kann dies nach §. 5. geom.

Aufg. geschehen, denn es ist aus $x = \frac{bh}{2m}$ auch

$$2m : b = h : x \text{ etc.}$$

§. 36.

Aufgabe. Es werde ein rechtwinkliges Dreyeck construirt, dessen eine Kathete die mittlere geometrische Proportional-Linie zwischen der Hypotenuse und der andern Kathete ist.

Auflösung. Gesetzt die erstere Kathete sey x , die Hypotenuse h , dann ist die andere Kathete $\sqrt{[h^2 - x^2]}$. Nach den Bedingungen der Aufgabe wird

$$h : \sqrt{[h^2 - x^2]} : x, \text{ daher}$$

$$hx = h^2 - x^2$$

$$x^2 + hx = h^2$$

$$x = -\frac{h}{2} + \sqrt{5\frac{h^2}{4}} = -\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\sqrt{5}$$

$$= \frac{h}{2} [\sqrt{5} - 1], \text{ dessen Construction sich}$$

aus §. 12. g. Aufg. ergibt unter der Voraussetzung, daß h eine bekannte Länge ist. Hat man x , so errichte man auf ihr in einem Endpunkte eine Senkrechte und schneide diese mit h aus dem andern Endpunkte ab, so erhält man das verlangte Dreyeck.

§. 37.

Aufgabe. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreyeckes ist m , der Perimeter desselben p ; wie groß ist jede Seite dieses Dreyeckes.

Auflösung. Da in dieser Aufgabe drey unbekannte Größen vorkommen, so ist es vor Allem nöthig, drey Gleichungen aus den Bedingungen der Aufgabe zu entwickeln. Es ist nämlich für den Inhalt dieses rechtwinkligen Dreyeckes, wenn x und y die beyden Katheten und z die Hypotenuse ausdrückt,

$$\text{I. } \frac{xy}{2} = m.$$

Da der Perimeter d. i. die Summe der drey Seiten des Dreyeckes p ist, so muß

$$\text{II. } x + y + z = p \text{ seyn.}$$

Nach §. 80. Zus. III. ist ferner

$$\text{III. } x^2 + y^2 = z^2.$$

Aus II. ist $x + y = p - z$, folglich

$$x^2 + 2xy + y^2 = p^2 - 2pz + z^2$$

$$\underline{x^2 + y^2 = z^2 \text{ [III.]}}$$

$$2xy = p^2 - 2pz, \text{ u. da } 2xy = 4m \text{ [I.] ist,}$$

$$4m = p^2 - 2pz, \text{ folglich } z = \frac{p^2 - 4m}{2p}.$$

Aus I. ist auch $x = \frac{2m}{y}$, folglich nach II. oder

$$x + y + z = p$$

$$\frac{2m}{y} + y + \frac{p^2 - 4m}{2p} = p$$

$$4pm + 2py^2 + p^2y - 4my = 2p^2y$$

$$2py^2 - p^2y - 4my = -4pm$$

$$y^2 - \frac{p^2 + 4m}{2p}y = -2m, \text{ woraus}$$

$$y = \frac{p^2 + 4m}{4p} \pm \sqrt{\left(\frac{p^4 + 8p^2m + 16m^2}{16p^2} - 2m\right)}$$

$$= \frac{p^2 + 4m}{4p} \pm \sqrt{\left(\frac{p^4 - 24p^2m + 16m^2}{16p^2}\right)}$$

$$= \frac{p^2 + 4m \pm \sqrt{[p^4 - 24p^2m + 16m^2]}}{4p}$$

Nun ist x zu finden. Es ist nämlich aus II.

$$x = p - [y + z]$$

$$= p - \left(\frac{p^2 + 4m \pm \sqrt{[p^4 - 24p^2m + 16m^2]}}{4p} + \frac{p^2 - 4m}{2p} \right)$$

$$= \frac{4p^2 - p^2 - 4m \pm \sqrt{[p^4 - 24p^2m + 16m^2]} - 2p^2 + 8m}{4p}$$

$$= \frac{p^2 + 4m \mp \sqrt{[p^4 - 24p^2m + 16m^2]}}{4p}$$

Es sind demnach

$$x = \frac{p^2 + 4m \mp \sqrt{[p^4 - 24p^2m + 16m^2]}}{4p}$$

$$y = \frac{p^2 + 4m \pm \sqrt{[p^4 - 24p^2m + 16m^2]}}{4p}$$

$$z = \frac{p^2 - 4m}{2p} = \frac{1}{2}p - \frac{2m}{p}$$

die drey Seiten des Dreyeckes, welche den, in den drey Gleichungen I, II und III ausgedrückten, Bedingungen entsprechen. Als Probe und zugleich zur Uebung im Calcul möge der Anfänger die Substitution obiger Werthe von x , y und z in diese Gleichungen wirklich vornehmen, wo dann das halbe Product aus den Werthen von x und y die Gröfse m , die Summe der Werthe von x , y und z aber p , so wie die Summe der Quadrate der Werthe von x und y das Quadrat des Werthes von z geben muß.

§. 38.

Aufgabe. (Fig. 167. u. 168.) In einem Dreyecke ABC sind die aus den Spitzen desselben auf die gegenüber liegenden Seiten gefällten Perpendicel gegeben; man soll daraus die Seiten und den Inhalt des Dreyeckes finden.

Auflösung. Man setze (Fig. 167 u. 168.) das Perpendicel $BD = a$, $CE = b$ und $AF = c$, die Seite $AB = x$, $AC = y$ und $BC = z$. Nach §. 26. ist der Inhalt des Dreyeckes ABC , oder

$$\triangle ABC = \frac{1}{4} \sqrt{[(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(z+y-x)]}.$$

Da $\triangle ADB = \triangle AEC = R$ und der Winkel A gemeinschaftlich, mithin $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ ist, so muß

$$BD : AB = CE : AC, \text{ oder}$$

$$a : x = b : y, \text{ woraus}$$

$$y = \frac{bx}{a} \text{ ist.}$$

Auch ist $\triangle CBE \sim \triangle ABF$, folglich

$$AF : AB = CE : BC, \text{ oder}$$

$$c : x = b : z, \text{ woraus}$$

$$z = \frac{bx}{c} \text{ ist.}$$

Bringt man diese Werthe für y und z in obige Gleichung für das Dreyeck ABC , so ist $\triangle ABC$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \sqrt{\left(x + \frac{bx}{a} + \frac{bx}{c}\right)\left(x + \frac{bx}{a} - \frac{bx}{c}\right)\left(x + \frac{bx}{c} - \frac{bx}{a}\right)\left(\frac{bx}{c} + \frac{bx}{a} - x\right)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{x \frac{ac+bc+ab}{ac} x \frac{ac+bc-ab}{ac} x \frac{ac+ab-bc}{ac} x \frac{ab+bc-ac}{ac}} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{x^4}{a^4 c^4} (ac+bc+ab)(ac+bc-ab)(ac+ab-bc)(ab+bc-ac)} \\ &= \frac{x^2}{4a^2 c^2} \sqrt{(ac+bc+ab)(ac+bc-ab)(ac+ab-bc)(ab+bc-ac)}. \end{aligned}$$

Man benenne das, was nach dem Wurzelzeichen steht, durch M , so wird

$$\Delta ABC = \frac{x^2}{4a^2c^2} \sqrt{M}. \text{ Auch ist}$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}bx, \text{ folglich}$$

$$\frac{1}{2}bx = \frac{x^2 \sqrt{M}}{4a^2c^2}, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{2a^2bc^2}{\sqrt{M}} = \frac{2a^2bc^2 \sqrt{M}}{M}.$$

Man kann nun leicht die beyden anderen Seiten des Dreyeckes finden, wenn man den gefundenen Werth von x in obige Gleichungen $y = \frac{bx}{a}$ und $z = \frac{bx}{c}$ bringt. Es ist nähmlich

$$y = \frac{2ab^2c^2}{\sqrt{M}} = \frac{2ab^2c^2 \sqrt{M}}{M}, \text{ und}$$

$$z = \frac{2a^2b^2c}{\sqrt{M}} = \frac{2a^2b^2c \sqrt{M}}{M}.$$

Endlich ist der Inhalt des Dreyeckes, oder

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}bx = \frac{a^2b^2c^2}{\sqrt{M}} = \frac{a^2b^2c^2 \sqrt{M}}{M}.$$

§. 39.

Aufgabe. (Fig. 169.) Ein Dreyeck ABC durch eine gerade Linie, die durch einen gegebenen Punct D der Seite AB geht, in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Gesetzt ED sey die Theilungslinie, dann $AB = a$, $AD = c$, $AC = b$ und $AE = x$. Man fälle EH und CI auf AB senkrecht, so ist $\Delta AEH \sim \Delta ACI$ [§. 76.], mithin

$$AE : AC = EH : CI \text{ und auch}$$

$$AE \cdot AD : AC \cdot AB = EH \cdot AD : CI \cdot AB, \text{ oder}$$

$$x \cdot c : b \cdot a = \Delta AED : \Delta ABC \text{ [§. 70.]}$$

$$xc : ab = 1 : 2, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{ab}{2c}.$$

Es ist also der Punct E von A in einer solchen Entfernung zu nehmen, als $AE = x = \frac{ab}{2c}$ ausdrückt.

Construction. Um $x = \frac{ab}{2c}$ durch Construction zu finden, folgere man daraus

$$c : \frac{1}{2}a = b : x, \text{ d. h.}$$

die Linie x ist die vierte geometrische Proportional-Linie zwischen c , $\frac{1}{2}a$ und b .

Man theile daher $AB = a$ in zwey gleiche Theile, ziehe CD und durch F die Linie $FE \parallel CD$, so ist

$$AD : AF = AC : AE, \text{ oder}$$

$$c : \frac{1}{2}a = b : AE, \text{ folglich } AE = x.$$

I. Zusatz. Auf ähnliche Art verfährt man um ein Dreyeck von einem Punkte aus so zu theilen, daß sich das ganze Dreyeck zum Theile verhält, wie $m : n$.

Fände man $x > AC$, so kann die Theilungslinie die Seite AC nicht treffen, wohl aber die Seite CB , und die Theilungslinie wird irgend eine andere Linie DK . Also ist gemäß der vorigen Auflösung, wenn $BK = z$ und $BC = d$ ist,

$$\begin{aligned} \triangle ABC : \triangle BDK &= AB \cdot CB : BD \cdot BK \\ &= a \cdot d : [a - c] \cdot z. \end{aligned}$$

Nach der Voraussetzung soll

$$\triangle ABC : \triangle ACKD = m : n, \text{ folglich}$$

$$\triangle ABC : \triangle BDK = m : m - n, \text{ also auch}$$

$$m : m - n = ad : (a - c) z, \text{ woraus}$$

$$[a - c] z = \frac{(m - n) ad}{m} \text{ und}$$

$$z = \frac{(m - n) ad}{(a - c) m} \text{ ist.}$$

Diese Grösse trage man von B nach K , und ziehe DK , so wird diese Linie das Dreyeck im Verhältnisse $m : n$ theilen.

II. Zusatz. Aus der Auflösung obiger Aufgabe, nämlich aus der Proportion, $xc : ba = \triangle AED : \triangle ABC$ ergibt sich, daß Dreyecke, die einen Winkel gleich haben, sich ihrem Flächeninhalte nach zu einander verhalten, wie die Producte jener zwey Seiten, welche diesen gleichen Winkel einschliessen.

§. 40.

Aufgabe. (Fig. 170.) Im Vierecke $ABCD$ ist der Winkel $A = 90^\circ$, man soll aus seinen vier Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ und $AD = d$ seinen Flächeninhalt bestimmen.

Auflösung. Man setze den zu suchenden Flächeninhalt des Viereckes $= x$, und die Diagonale $BD = m$.

Nun ist $m = \sqrt{a^2 + d^2}$,

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} a.d$$

$$\triangle BCD = \frac{1}{4} \sqrt{[(b+c+m)(b+c-m)(b+m-c)(c+m-b)]}$$

$$\text{mith. } \triangle ABD + \triangle BCD = x = \frac{1}{2} a.d + \frac{1}{4} \sqrt{[(b+c+m)(b+c-m)(b+m-c)(c+m-b)]}.$$

§. 41.

Aufgabe. (Fig. 171.) Ein Dreyeck ABC durch eine, zu einer Seite des Dreyeckes parallele, Linie DE nach einem gegebenen Verhältnisse, $m:n$, zu theilen.

Auflösung. Es ist klar, daß die Auflösung dieser Aufgabe darin besteht, den Punct D , oder $DB = x$, zu bestimmen.

Da nun $DE \parallel AC$ seyn muß, so ist $\triangle BDE \sim \triangle ABC$, folglich, wenn $AB = c$ ist,

$$\triangle ABC : \triangle BDE = AB^2 : BD^2$$

$$= c^2 : x^2$$

$$= m : n. \text{ Mithin}$$

$$m : n = c^2 : n^2, \text{ woraus}$$

$$x^2 = \frac{nc^2}{m} \text{ und}$$

$$x = c\sqrt{\frac{n}{m}}.$$

Diese Gröfse trage man von B nach D auf, und ziehe durch D eine Parallele mit AC , so ist die Bedingung der Aufgabe erfüllt.

§. 42.

Aufgabe. (Fig. 172.) Die drey Seiten eines Dreyeckes ABC sind gegeben; man theile AB in zwey glei-

che Theile und ziehe nach dem Theilungspuncte D von der Spitze C die Linie CD . Man soll die Gröſſe dieser Linie bestimmen.

Auflösung. Gesetzt $AC = b$, $BC = a$, $AD = c$ und $AB = 2c$. Man ziehe die Senkrechte CE , und setze $EB = x$, $DE = c - x$, und $DC = z$.

Betrachtet man die beyden rechtwinkligen Dreyecke CDE und CBE , so ist:

$$CE^2 = CD^2 - DE^2 = z^2 - [c - x]^2 = z^2 - c^2 + 2cx - x^2$$

$$CE^2 = CB^2 - EB^2 = a^2 - x^2,$$

folglich $z^2 - c^2 + 2cx - x^2 = a^2 - x^2$, und

$$2cx = a^2 + c^2 - z^2$$

$$x = \frac{a^2 + c^2 - z^2}{2c}.$$

Nun ist auch aus den beyden rechtwinkligen Dreyecken ACE und BCE

$$CE^2 = CB^2 - EB^2 = a^2 - x^2$$

$$CE^2 = AC^2 - AE^2 = b^2 - [2c - x]^2 = b^2 - 4c^2 + 4cx - x^2.$$

Mithin auch $b^2 - 4c^2 + 4cx - x^2 = a^2 - x^2$, woraus

$$4cx = a^2 + 4c^2 - b^2, \text{ also}$$

$$x = \frac{a^2 + 4c^2 - b^2}{4c} \text{ ist.}$$

Beyde Werthe von x zusammengestellt, gehen:

$$\frac{a^2 + 4c^2 - b^2}{4c} = \frac{a^2 + c^2 - z^2}{2c}$$

$$a^2 + 4c^2 - b^2 = 2a^2 + 2c^2 - 2z^2$$

$$2z^2 = a^2 + b^2 - 2c^2$$

$$z = \frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{2} = DC.$$

§. 43.

Aufgabe. (Fig. 158.) Im rechtwinkligen Dreyecke ABC ist die Hypotenuse $AC = b$ und die Summe der Katheten $AB + BC = a$ gegeben; man soll die beyden Katheten selbst finden.

Auflösung. Man setze $AB = x$ und $BC = y$, so ist der Aufgabe gemäß:

$$\text{I. } x + y = a \quad \text{und}$$

$$\text{II. } x^2 + y^2 = b^2 \quad [\S. 80. \text{Zus. III.}]$$

Aus I. wird $x^2 + 2xy + y^2 = a^2$, davon II. subtrahirt,

$$\underline{x^2 + y^2 = b^2, \text{ gibt}}$$

$$\underline{2xy = a^2 - b^2, \text{ woraus}}$$

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2y} \text{ ist.}$$

Substituirt man diesen Werth von x in I., so ist:

$$\frac{a^2 - b^2}{2y} + y = a$$

$$a^2 - b^2 + 2y^2 = 2ay$$

$$2y^2 - 2ay = b^2 - a^2$$

$$y^2 - ay + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2 - a^2}{4}$$

$$y = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 - a^2} = \frac{1}{2} [a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}].$$

Um nun auch x zu bestimmen, nehme man I. und substituirt für y den so eben gefundenen Werth, nämlich:

$$x = a - y$$

$$= a - \left[\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 - a^2} \right]$$

$$= \frac{a}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 - a^2} = \frac{1}{2} [a \mp \sqrt{2b^2 - a^2}].$$

Beyspiel. Ist $b = 97'$ und $a = 137'$, so erhält man durch gehörige Substitution $x = 72'$ und $y = 65'$.

§. 44.

Aufgabe. (Fig. 172.) Der Flächeninhalt a eines schiefwinkligen Dreyeckes ABC , seine Höhe $CE = h$ und das durch diese abgeschnittene Stück $BE = d$ sind gegeben; man soll jede Seite finden.

Auflösung. Gesetzt $AE = x$, also $AB = x + d$, $AC = y$ und $BC = \sqrt{BE^2 + CE^2} = \sqrt{d^2 + h^2}$.

Ferner ist $\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot h$, oder

$$a = \frac{1}{2} h \cdot AB, \text{ folglich die zweite}$$

Seite

$$\frac{2a}{h} = AB.$$

Da nun auch $AB = x + d$, folglich $x + d = \frac{2a}{h}$ u.

$$x = \frac{2a}{h} - d \Rightarrow \frac{2a - hd}{h} \text{ ist, so mu\ss die dritte Seite,}$$

indem $AC^2 = AE^2 + CE^2$ ist, auch

$$y = \sqrt{x^2 + h^2}$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{2a - hd}{h}\right)^2 + h^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{4a^2 - 4ahd + h^2d^2 + h^4}{h^2}}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{4a^2 - 4ahd + h^2d^2 + h^4}}{h} \text{ seyn.}$$

§. 45.

Aufgabe. (Fig. 94.) In einem rechtwinkligen Drey-
ecke ABC ist die Hypotenuse $BC = a$, und das Ver-
h\u00e4ltni\ss der beyden Katheten $AB : AC = m : n$ gege-
ben; man soll beyde Katheten finden.

Aufl\u00f6sung. Es sey $AB = x$ und $AC = y$.
Nach §. 80. Zus. III. ist $BC^2 = AB^2 + AC^2$, oder

$$a^2 = x^2 + y^2 \text{ und}$$

$$a^2 - y^2 = x^2.$$

Nun ist der Aufgabe gem\u00e4\ss:

$$x : y = m : n, \text{ also } x = \frac{m}{n} y$$

und $x^2 = \frac{m^2}{n^2} y^2$, welcher Werth, in die vorige Gleichung substituirt, die Gleichung

$$\frac{m^2}{n^2} y^2 = a^2 - y^2 \text{ gibt, woraus}$$

$$m^2 y^2 + n^2 y^2 = a^2 n^2$$

$$y^2 = \frac{a^2 n^2}{m^2 + n^2}$$

$$y = \frac{a n}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{an\sqrt{m^2 + n^2}}{m^2 + n^2}$$

Nun ist nach Obigem $x = \frac{m}{n} y$, mithin auch

$$x = \frac{m}{n} \cdot \frac{an\sqrt{m^2 + n^2}}{m^2 + n^2}$$

$$= \frac{am\sqrt{m^2 + n^2}}{m^2 + n^2}$$

Beyspiel. Für $a = 300'$ und $m : n = 4 : 3$ ergibt sich durch gehörige Substitution $y = 180'$ und $x = 240'$.

§. 46.

Aufgabe. (Fig. 94.) Im rechtwinkligen Dreyecke ABC ist die Hypotenuse $BC = a$ und die Senkrechte vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse, nämlich $AD = p$ gegeben; man soll die dadurch abgeschnittenen Stücke der Hypotenuse und beyde Katheten finden.

Auflösung. 1) Gesetzt $BD = x$ und $DC = y$, folglich, indem $x + y = a$ ist $y = a - x$.

2) Es ist $\triangle ABD \sim \triangle ADC$ [§. 80. 1.], mithin

$$BD : AD : DC \text{ [§. 80. 2.], oder}$$

$$x : p : y, \text{ woraus}$$

$$p^2 = xy = x[a - x] \text{ [1.]}$$

$$p^2 = ax - x^2$$

$$x^2 - ax = -p^2$$

$$x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - p^2$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - p^2} = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4p^2}$$

$$= \frac{1}{2}[a \pm \sqrt{(a+2p)(a-2p)}]$$

3) Da aus 1) $y = a - x$ ist, so muß auch

$$y = a - \left[\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - p^2}\right]$$

$$= \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - p^2} = \frac{1}{2}[a \mp \sqrt{(a+2p)(a-2p)}].$$

4) Nach §. 80. Zus. I. ist:

$$BD : AB : BC, \text{ oder}$$

$$x : AB : a, \text{ also}$$

$$AB^2 = ax = \frac{a}{2}[a \pm \sqrt{(a+2p)(a-2p)}] \text{ und}$$

$$AB = \sqrt{\frac{a}{2}[a \pm \sqrt{(a+2p)(a-2p)}]}.$$

Ebenso ist für die andere Kathete:

$$DC : AC : BC, \text{ oder}$$

$$y : AC : a, \text{ woraus}$$

$$AC^2 = ay = \frac{a}{2}[a \mp \sqrt{(a+2p)(a-2p)}] \text{ und}$$

$$AC = \sqrt{\frac{a}{2}[a \mp \sqrt{(a+2p)(a-2p)}]}.$$

Beyspiel. Für $a = 75'$ und $p = 36'$ wird $x = 27'$, $y = 42'$ dann $AB = 60'$ und $AC = 45'$.

§. 47.

Aufgabe. (Fig. 158.) In einem rechtwinkligen Drey-
ecke ABC ist die Hypotenuse $AC = b$, und der Un-
terschied zwischen beyden Katheten $BC - AB = d$
gegeben; man soll die beyden Katheten BC und AB
selbst finden,

Auflösung. Man setze $BC = x$ und $AB = y$. Be-
schreibt man mit AB aus B den Kreisbogen AG , so ist
 $GC = BC - BG = BC - AB = x - y = d$, also
auch $x = d + y$.

Es ist ferner $x^2 + y^2 = b^2$, also $x^2 = b^2 - y^2$;
mithin die neue Gleichung $[d + y]^2 = b^2 - y^2$, oder

$$d^2 + 2dy + y^2 = b^2 - y^2, \text{ woraus}$$

$$2y^2 + 2dy = b^2 - d^2$$

$$y^2 + dy + (\frac{1}{2}d)^2 = \frac{b^2 - d^2}{2} + \frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}d^2$$

$$y = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{[\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}d^2]} = -\frac{1}{2}d \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 - d^2}.$$

Da nun aus Obigem $x = d + y$ ist, so muß auch

$$x = d - \frac{1}{2}d \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 - d^2}$$

$$= \frac{1}{2}d \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 - d^2} = \frac{1}{2}[d \pm \sqrt{2b^2 - d^2}].$$

Beyspiel. Ist $b = 97'$ und $d = 7'$, so wird $BC =$
 $x = 65'$ und $AB = y = 72'$.

§. 48.

Aufgabe. (Fig. 173.) Im Durchmesser AD eines
Kreises ist ein Punckt P gegeben, wodurch die senk-
rechte Linie PM gezogen ist; man soll aus A durch
 MO eine Sehne AB so ziehen, daß EB dem Radius
des Kreises gleich oder $EB = AC = r$ werde. Wie
groß muß AB werden?

Auflösung. Man setze, da der Punct P gegeben
ist $AP = a$, dann $AC = EB = r$, $AD = 2r$ und
 $AB = x$, also $AE = AB - EB = x - r$.

Man ziehe BD und dann BG senkrecht auf AD ,
so ist:

$$\triangle APE \sim \triangle ABG, \text{ also}$$

$$AE : AP = AB : AG, \text{ oder}$$

$$x - r : a = x : AG, \text{ woraus}$$

$$AG = \frac{ax}{x-r} \text{ ist.}$$

Ferner ist auch $\triangle ABD \sim \triangle ABG$ [§. 80.], mithin

$$AD : AB = AB : AG, \text{ oder}$$

$$2r : x = x : AG, \text{ woraus wieder}$$

$$AG = \frac{x^2}{2r} \text{ ist.}$$

Stellt man beyde Werthe von AG zusammen, so ergibt sich:

$$\frac{x^2}{2r} = \frac{ax}{x-r}, \text{ oder}$$

$$x(x-r) = 2ar, \text{ folglich}$$

$$x^2 - rx + (\frac{1}{2}r)^2 = 2ar + \frac{1}{4}r^2$$

$$x = \frac{1}{2}r \pm \sqrt{2ar + \frac{1}{4}r^2} = \frac{1}{2}[r \pm \sqrt{r(8a+r)}] = AB.$$

§. 49.

Aufgabe. (Fig. 174.) Im Dreyecke ABC sind die Grundlinie $AB = b$ und die Höhe $CD = a$ gegeben; man soll in diesem Dreyecke ein Rechteck EG so zeichnen, daß dessen Flächeninhalt sich zu dem des Dreyeckes verhalte, wie $m : n$.

Auflösung. 1) Gesetzt $AB = b$, $CD = a$, so ist $\triangle ABC = \frac{1}{2} a \cdot b$; $EH = ID = x$, $CI = a - x$, $EF = y$.

Es ist $\triangle ABC \sim \triangle EFC$, folglich

$$AB : CD = EF : CI, \text{ oder}$$

$$b : a = y : a - x, \text{ woraus}$$

$$ay = (a - x)b$$

$$y = \frac{(a-x)b}{a}.$$

Da ferner nach den Bedingungen der Aufgabe

$$EG : \triangle ABC = m : n \text{ oder}$$

$$xy : \frac{1}{2} ab = m : n \text{ seyn soll, so ist}$$

$$\text{auch} \quad nxy = \frac{1}{2} abm \text{ und}$$

$$y = \frac{abm}{2nx}.$$

Stellt man beyde Werthe von y zusammen, so wird

$$\frac{(a-x)b}{a} = \frac{abm}{2nx}, \text{ mithin}$$

$$2anbx - 2nbx^2 = a^2bm$$

$$x^2 - ax = -\frac{a^2m}{2n}$$

$$x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2m}{2n}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2m}{2n}} = \frac{1}{2}a \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2m}{n}}\right] = ID,$$

Durch ID ist der Punct I in CD gefunden, durch welchen man $EF \parallel AB$ ziehen muß.

2) Will man eine besondere Gleichung für die zweyte Seite EF des gesuchten Rechteckes angeben, so betrachte man $CI = a - x$ [1.] folglich, da x bekannt ist:

$$CI = a - x = a - \left[\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2} \sqrt{1 - \frac{2m}{n}}\right]$$

$$= \frac{a}{2} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{2m}{n}}\right]. \text{ Ferner ist}$$

$$\text{aus 1) } y = \frac{(a-x)b}{a}, \text{ also auch}$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{2} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{2m}{n}}\right]$$

$$= \frac{b}{2} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{2m}{n}}\right] = EF.$$

§. 50.

Aufgabe. (Fig. 175.) Es sind zwey concentrische Kreise gegeben. Man soll durch dieselben eine gerade Linie so ziehen, daß sich die beyden Sehnen AB und ED verhalten, wie $m : n$.

Auflösung. Man fälle FC senkrecht auf AB .

Durch den Abstand FC der Sehnen vom Mittelpunkte sind diese selbst bestimmt.

Es ist $AF = \frac{1}{2}AB$ und $EF = \frac{1}{2}ED$. Man setze

$$AC = R, EC = r, FC = x, \text{ so ist:}$$

$$AF^2 = AC^2 - FC^2$$

$$= R^2 - x^2; \text{ eben so}$$

$$EF^2 = EC^2 - FC^2$$

$$= r^2 - x^2.$$

Da den Bedingungen der Aufgabe gemäß

$AB : ED = m : n$ seyn soll, so ist auch

$$\frac{1}{2} AB : \frac{1}{2} ED = m : n, \text{ oder}$$

$AF : EF = m : n$ und auch

$$AF^2 : EF^2 = m^2 : n^2, \text{ oder}$$

$$R^2 - x^2 : r^2 - x^2 = m^2 : n^2, \text{ woraus}$$

$$R^2 n^2 - x^2 n^2 = r^2 m^2 - x^2 m^2$$

$$x^2 m^2 - x^2 n^2 = r^2 m^2 - R^2 n^2$$

$$x^2 = \frac{r^2 m^2 - R^2 n^2}{m^2 - n^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{(rm + Rn)(rm - Rn)}{(m + n)(m - n)}} = FC.$$

§. 51.

Aufgabe. (Fig. 176.) Das Trapez $ABCD$ soll durch eine gerade Linie parallel zur Grundlinie in zwey gleiche Theile getheilt werden.

Auflösung. Man fälle $AH = h$ senkrecht auf CD und ziehe EF , welche die Theilungslinie vorstellen soll, parallel zu CD , und setze $AB = a$ $CD = A$, $EF = y$ und $AG = x$.

Auch ziehe man $AI \parallel BD$, so wird $CI = CD - ID = A - a$, und $EK = EF - KF = y - a$. Ferner ist $AD = \frac{1}{2} h [A + a]$ und $AF = \frac{1}{2} x [y + a]$; mithin der Aufgabe gemäß $AF = \frac{1}{2} AD$, oder

$$x [y + a] = \frac{1}{2} h [A + a].$$

Da $EK \parallel CI$ ist, so wird auch

$$EK : CI = AG : AH, \text{ oder}$$

$$y - a : A - a = x : h, \text{ woraus}$$

$$x = h \frac{y - a}{A - a}.$$

Diesen Werth von x in die vorige Gleichung substituirt, gibt:

$$h \frac{(y - a)(y + a)}{A - a} = \frac{1}{2} h [A + a]$$

$$y^2 - a^2 = \frac{1}{2} [A^2 - a^2]$$

$$y^2 = \frac{A^2 - a^2}{2} + a^2 = \frac{A^2 + a^2}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{A^2 + a^2}{2}} = EF.$$

Will man auch x bestimmen, so wird aus

$$x = h \frac{(y-a)}{A-a} \\ = \frac{h}{A-a} \left[\sqrt{\frac{A^2 + a^2}{2}} - a \right] = AG, \text{ und } G \text{ ist}$$

der Punct durch welchen $EF \parallel CD$ gezogen werden muß.

§. 52.

Aufgabe. (Fig. 176.) Man soll von einem Trapeze AD durch eine zur Grundlinie parallele Linie EF ein Stück von gegebenem Inhalte abschneiden.

Auflösung. Man fälle AH senkrecht auf CD , ziehe $AI \parallel BD$, und setze $AB = a$, $CD = A$, $AH = h$, dann $EF = y$ und $AG = x$, so wie den Inhalt des abzuschneidenden Stückes $= m$. Man hat also den Punct G zu bestimmen, durch welchen die Theilungslinie zu CD parallel zu ziehen ist.

Es ist nach obiger Construction $EK = EF - AB = y - a$, $CI = CD - AB = A - a$; und da $EK \parallel CI$, auch

$$EK : CI = AG : AH, \text{ oder}$$

$$y - a : A - a = x : h, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{y - a}{A - a} \cdot h.$$

Ferner soll $AF = (a + y) \frac{x}{2} = m$ seyn, woraus ebenfalls $x = \frac{2m}{a + y}$ ist.

Stellt man beyde Werthe von x in eine neue Gleichung zusammen, so wird:

$$\frac{y - a}{A - a} \cdot h = \frac{2m}{y + a}$$

$$(y + a)(y - a) \cdot h = 2m (A - a)$$

$$y^2 - a^2 = \frac{2m}{h} (A-a)$$

$$y = \sqrt{\left[\frac{2m}{h}(A-a) + a^2\right]} = EF.$$

Für $x = \frac{(y-a)h}{A-a}$ ist

$$= \frac{h}{A-a} [y-a]$$

$$= \frac{h}{A-a} \left[\sqrt{\left[\frac{2m}{h}(A-a) + a^2\right]} - a \right] = AG.$$

§. 53.

Aufgabe. (Fig. 177.) Man soll das Trapez BD durch eine gerade Linie, aus einem gegebenen Punkte T in einer der parallelen Seiten, nach einem gegebenen Verhältnisse theilen.

Auflösung. Gesetzt TE sey die Theilungslinie, so, daß das dadurch abgeschnittene Stück $ABEF$ zum ganzen Trapeze sich verhält, wie $n : m$. Nun sey $AD = a$, $BC = b$, $AB = c$, $CD = d$, $AT = f$ und $BE = x$, welches zu suchen ist, indem durch den Punkt E die Richtung der Theilungslinie ET bestimmt ist,

Bedeutet h die Höhe des Trapezes BD , so ist

$$ABCD = [AD + BC] \frac{h}{2} = [a + b] \frac{h}{2}$$

$$ABET = [AF + BE] \frac{h}{2} = [f + x] \frac{h}{2}.$$

$$\text{Mithin } ABCD : ABET = [a + b] \frac{h}{2} : [f + x] \frac{h}{2}$$

$$= a + b : f + x, \text{ und, da auch } ABCD : ABET = m : n \text{ [Aufg.] ist, so}$$

muß auch $a + b : f + x = m : n$, folglich

$$[f + x] m = [a + b] n$$

$$f + x = \frac{n}{m} [a + b] \quad \text{und}$$

$$x = \frac{n}{m} [a + b] - f = BE \text{ seyn.}$$

Diese Länge x oder BE trage man von B gegen C hin, und ziehe ET , so ist die verlangte Theilung geschehen.

Für den Fall, daß $x = 0$ oder $= b$ wird, fällt die Theilungslinie mit BT oder CT zusammen. Würde aber x negativ oder grösser als b , so bedeutet dies, daß die Theilungslinie auf BA oder CD fällt.

Ist x negativ, so kommt es darauf an, $AF = y$ zu finden. Man ziehe BT und FT , so ist:

$$ABCD : \triangle ABT = [a+b] \frac{h}{2} : f \cdot \frac{h}{2}, \text{ oder}$$

$$ABCD : \triangle ABT = a+b : f, \text{ aber es ist auch}$$

$$\triangle ABT : \triangle AFT = c : y \quad [\S. 68.], \text{ mithin}$$

$$\triangle ABT. ABCD : \triangle ABT. \triangle AFT = (a+b)c : fy, \text{ und}$$

$$ABCD : \triangle AFT = (a+b)c : fy, \text{ da aber auch}$$

$$ABCD : \triangle AFT = m : n \quad [\text{Aufg.}], \text{ so mu\ss}$$

$$(a+b)c : fy = m : n \text{ und daher}$$

$$fym = (a+b)cn, \text{ also}$$

$$y = \frac{(a+b)cn}{fm} = AF \text{ seyn.}$$

Ist x grösser als b , so ist für $DG = z$, wenn man FG zieht,

$$ABCD : \triangle CDT = [a+b] \frac{h}{2} : [a-f] \frac{h}{2}, \text{ oder}$$

$$ABCD : \triangle CDT = a+b : a-f. \text{ Auch ist}$$

$$\triangle CDT : \triangle GTD = d : z \quad [\S. 68], \text{ folglich auch}$$

$$ABCD : \triangle GTD = (a+b)d : (a-f)z, \text{ und da}$$

$$ABCD : ABCGT = m : n, \text{ und}$$

$$ABCD : ABCD - ABCGT = m : m - n \text{ oder}$$

$$ABCD : \triangle GTD = m : m - n \text{ ist, so mu\ss auch}$$

$$(a+b)d : (a-f)z = m : m - n \text{ und daher}$$

$$(a-f)zm = (a+b)(m-n)d, \text{ also}$$

$$z = (m-n) \frac{(a+b)d}{(a-f)m} = GD \text{ seyn.}$$

§. 54.

Aufgabe. (Fig. 178.) Jedes Viereck durch eine gerade Linie aus einem gegebenen Punkte auf einer seiner Seiten nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Auflösung. 1) Das gegebene Viereck sey $ABCD$ und E der Theilungspunct, aus welchen EF das Viereck so theilt, daß $ABCD : CDEF = m : n$ ist.

Man verlängere BC und AD bis sie sich in G schneiden. Es sey $AG = a$, $BG = b$, $DG = c$ und $CG = d$, welche Linien sich leicht, im Falle das Viereck selbst bestimmt ist, finden lassen. Da ferner der Punct E gegeben ist, so ist auch $EG = f$ gegeben.

Der Punct F , oder $FG = x$, soll gefunden werden.

2) Es ist $\triangle ABG : \triangle CDG = AG.BG : DG.CG$ [§. 39. Z. II. geom. Aufg.] $= a . b : c . d$, also

$\triangle ABG - \triangle CDG : \triangle CDG = ab - cd : cd$, oder

$$ABCD : \triangle CDG = ab - cd : cd$$

3) Ebenso ist:

$\triangle FEG : \triangle CDG = EG.FG : DG.CG$ [§. 39. Z. II. geom. Aufg.] $= f . x : c.d$, also auch

$\triangle FEG - \triangle CDG : \triangle CDG = fx - cd : cd$, oder

$CDEF : \triangle CDG = fx - cd : cd$. Da auch

$ABCD : \triangle CDG = ab - cd : cd$ [2.] ist, so

mufs auch $ABCD : CDEF = ab - cd : fx - cd$. Es ist

aber $ABCD : CDEF = m : n$ [Vorauss.]

Mithin $ab - cd : fx - cd = m : n$, woraus

$$fx - cd = \frac{(ab - cd)n}{m} \text{ und}$$

$$x = \frac{(ab - cd)n}{fm} + \frac{cd}{f} = FG.$$

Diese gefundene Linie trage man von G gegen B durch FG auf, und ziehe FE , so ist dadurch das Viereck nach dem verlangten Verhältnisse getheilt.

§. 55.

Aufgabe. (Fig. 179.) Man soll eine gerade Linie AB so in zwey Theile theilen, daß das Rechteck, aus den beyden Theilen construirt, einem gegebenen Quadrate MP gleich wird.

Auflösung. Gesetzt $AB = a$ und $MP = b^2$. Man nehme an, G sey der Theilungspunct. Nimmt man

$AG = x$, also $GB = a - x$, so muß der Aufgabe gemäß $AG \cdot GB = b^2$ oder

$x(a - x) = b^2$ seyn, woraus

$$x^2 - ax = -b^2 \quad \text{und}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2} = \frac{1}{2} [a \pm \sqrt{(a+2b)(a-2b)}].$$

Construction. Man beschreibe über AB einen Halbkreis errichte in B die Linie $HB = b$ senkrecht auf AB , ziehe endlich durch H die Linie $HE \parallel AB$, wodurch der Halbkreis in F geschnitten wird. Die Senkrechte FG von F auf AB theilt diese in G in die verlangten Theile AG und GB .

Analytischer Beweis. Man ziehe den Radius CF so ist: $CG = \sqrt{CF^2 - FG^2} = \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 - b^2}$, folglich

$$AG = AC + CG$$

$$= \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 - b^2}, \quad \text{und}$$

$$AD = AC - DC = AC - CG$$

$$= \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 - b^2}, \quad \text{wenn man auch}$$

vom Durchschnittspunkte E des Bogens und der Parallele auf AB die Senkrechte ED fällt.

Synthetischer Beweis. Es ist $FG = HB = b$ [Constr.] und $AG : FG : GB$ [§. 80. Zus. II.], woraus

$$AG \cdot GB = FG^2 = b^2 \text{ ist.}$$

§. 56.

Aufgabe. (Fig. 180.) Man soll eine gegebene gerade Linie AB um so viel verlängern, daß das Rechteck, aus der ganzen verlängerten Linie und dem verlängerten Stücke derselben construirt, einem gegebenen Quadrate mit der Seite n gleiche.

Auflösung. Es sey $AB = a$, $BD = x$, dann ist $AD = a + x$, folglich der Aufgabe gemäß:

$$AD \cdot BD = n^2 \quad \text{oder}$$

$$(a + x)x = n^2, \quad \text{woraus}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + n^2} = BD.$$

Construction. Man halbire AB in C , und errichte in B auf AB die Senkrechte $BE = n$, ziehe EC und

beschreibe mit CE den Kreisbogen ED , der die Verlängerung von AB in D schneidet. Das Stück BD ist dann die gesuchte Verlängerung.

Beweis. Denn es ist:

$$CD = CE = \sqrt{CB^2 + BE^2} = \sqrt{\left[\frac{a^2}{4} + n^2\right]} \text{ und}$$

$$BD = CD - CB = \sqrt{\left[\frac{a^2}{4} + n^2\right]} - \frac{1}{2}a = x.$$

§. 57.

Aufgabe. (Fig. 181.) Eine gegebene gerade Linie AB soll so in zwey Theile AC und CB getheilt werden, daß das Rechteck, aus dem einen Theile, AC , und einer anderen gegebenen geraden Linie n construirt, dem Quadrate des andern Theiles, CB , gleich sey.

Auflösung. Gesetzt $AB = a$, $BC = x$, so ist $AC = AB - CB = a - x$ und vermöge der Bedingung der Aufgabe:

$$AC \cdot n = CB^2, \text{ oder}$$

$$(a-x) n = x^2, \text{ woraus}$$

$$x = -\frac{1}{2}n \pm \sqrt{\left[an + \frac{1}{4}n^2\right]}.$$

Construction. Man verlängere AB , so, daß $BE = n$ wird, beschreibe über AE einen Halbkreis, und halbiere BE in D , errichte in B die senkrechte Linie BF , ziehe die Linie FD , und beschreibe mit FD den Kreisbogen FC ; so ist BC das verlangte Stück.

Beweis. Es ist $AB : BF : BE$ [§. 80. Zus. II.], also $BF^2 = AB \cdot BE = an$.

Auch ist $FD^2 = FB^2 + BD^2$, also

$$CD = FD = \sqrt{\left[an + \frac{1}{4}n^2\right]}, \text{ weil}$$

$$BD = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}n, \text{ und } BD^2 = \frac{1}{4}n^2 \text{ ist.}$$

Es ist demnach

$$BC = CD - BD$$

$$= \sqrt{\left[an + \frac{1}{4}n^2\right]} - \frac{1}{2}n = x.$$

Der zweyte Werth von x für das negative Wurzel-Zeichen kann, da er ganz negativ ausfällt, nicht gebraucht werden, weil dieser Werth von BC darauf

deutet, daß der Theilungspunct rechts von B liegen soll, welches aber unmöglich ist, weil auf dieser Seite von B nichts von der Linie AB liegt.

§. 58.

Aufgabe. (Fig. 182.). Man soll zwey Linien finden, deren Quadrate einem gegebenen Quadrate, und deren Rechteck einem gegebenen Rechtecke gleich ist.

Auflösung. Es sey $AB = a$ die Seite des gegebenen Quadrates und $GD = b$, $DE = c$ die Seiten des gegebenen Rechteckes. Man setze die beyden zu suchenden Linien x und y , so ist nach der Aufgabe:

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ und } xy = bc.$$

Daraus ist $y = \frac{bc}{x}$ und

$$x^2 + \frac{b^2c^2}{x^2} = a^2$$

$$x^4 + b^2c^2 = a^2x^2$$

$$x^4 - a^2x^2 + \left(\frac{1}{2}a^2\right)^2 = \frac{1}{4}a^4 - b^2c^2$$

$$x^2 - \frac{1}{2}a^2 = \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2}, \text{ also}$$

$$x = \sqrt{\left[\frac{1}{2}a^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2}\right]} = \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left[a^2 \pm \sqrt{(a^2 + 2bc)(a^2 - 2bc)}\right]\right]}.$$

Aus obiger Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ ist $y^2 = a^2 - x^2$ und, wenn man statt x seinen Werth substituirt,

$$y^2 = a^2 - \frac{1}{2}a^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2} = \frac{1}{2}a^2 \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2}, \text{ und}$$

$$y = \sqrt{\left[\frac{1}{2}a^2 \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2}\right]} = \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left[a^2 \mp \sqrt{(a^2 + 2bc)(a^2 - 2bc)}\right]\right]}.$$

Construction. Man suche zu AB , DG und DE oder zu a , b und c die vierte geometrische Proportionallinie z [§. 74. 2.], beschreibe über AB einen Halbkreis, errichte in B einen Perpendicular $BG = z$, ziehe $GH \parallel AB$ und endlich AH und HB , welche die gesuchten Linien sind.

Beweis. Man ziehe HC und den Perpendicular HI auf AB . Da z die vierte geometrische Proportional-Linie zwischen a , b und c [Constr.] oder $a : b = c : z$ ist, so muß $z = \frac{bc}{a} = BG = HI$ seyn,

Nun ist, im rechtwinkligen Dreyecke CHI ,

$$CI^2 = CH^2 - HI^2 \text{ und}$$

$$CI = \sqrt{\left[\frac{1}{4}a^2 - z^2\right]} = \sqrt{\left[\frac{1}{4}a^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right]}.$$

$$\text{Mithin } AI = AC + CI$$

$$= \frac{1}{2}a + \sqrt{\left[\frac{1}{4}a^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right]} \text{ und}$$

$$IB = CB - CI$$

$$= \frac{1}{2}a - \sqrt{\left[\frac{1}{4}a^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right]}.$$

Ferner ist $AI : AH : AB$ [§. 80. Zus. I.], also

$$AH^2 = AI \cdot AB$$

$$= \frac{1}{2}a^2 + a \sqrt{\left[\frac{1}{4}a^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{2}a^2 + \sqrt{\left[\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2\right]}.$$

Ebenso ist $AB : HB : IB$, also

$$HB^2 = AB \cdot IB$$

$$= \frac{1}{2}a^2 - a \sqrt{\left[\frac{1}{4}a^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{2}a^2 - \sqrt{\left[\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2\right]}.$$

Daher $x = AH = \sqrt{\left[\frac{1}{2}a^2 + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2\right)}\right]}$ und

$$y = HB = \sqrt{\left[\frac{1}{2}a^2 - \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4 - b^2c^2\right)}\right]}.$$

Synthetischer Beweis. Es ist $AHB = R$, folglich $AH^2 + HB^2 = AB^2$, welches der erste Theil der Forderung der Aufgabe ist. Ferner ist nach Obigem $a : b = c : z$ oder $AB : DG = DE : GB$, also auch:

$$DG \cdot DE = AB \cdot GB = AB \cdot HI.$$

Aber $\frac{1}{2}AB \cdot HI = \triangle ABH = \frac{1}{2}AH \cdot HB$, mithin

$AB \cdot HI = AH \cdot HB = DG \cdot DE$, wodurch die zweyte Bedingung der Aufgabe erfüllt ist.

§. 59.

Aufgabe. (Fig. 183.) Es ist im Endpuncte B eines Durchmessers AB auf diesem eine Senkrechte BC errichtet; man soll in dieser Senkrechten einen Punct D finden, so dafs, wenn man von diesem Puncte D nach dem andern Endpuncte des Durchmessers, A ,

eine gerade Linie, DA , ziehet, der ausserhalb des Kreises liegende Theil derselben, DE , einer gegebenen geraden Linie, mn , gleich sey.

Auflösung. Es sey $AB = a$, $mn = b$, $AD = x$, man ziehe BE , so ist $AEB = R = ABD$

$$EAB = DAB$$

folgl. $\triangle ABE \sim \triangle DAB$ und

$$AD : AB = AB : AE, \text{ oder}$$

$$x : a = a : x - b, \text{ woraus}$$

$$x^2 - bx = a^2$$

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2} = \frac{1}{2}[b + \sqrt{4a^2 + b^2}].$$

Construction. Auf der Senkrechten BC nehme man $BH = mn = b$, beschreibe um BH einen Kreis, ziehe durch dessen Mittelpunkt O und durch A die Linie AF , beschreibe mit AF einen Kreisbogen, welcher die Linie BC in D schneidet, so ist D der gesuchte Punct, durch welchen nach A man die Linie AD ziehen muß, wenn $DE = mn = b$ seyn soll.

Beweis. $AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2}$,
Daher $AF = AD = AO + OF = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2} + \frac{1}{2}b = x$

§. 60.

Aufgabe. (Fig. 184.) Es ist ein Quadrant ACB gegeben; man soll in demselben einen Kreis beschreiben, der sowohl den Bogen, als die beyden Halbmesser berühre.

Auflösung. Es sey $AC = BC = a$. Der im Quadranten beschriebene Kreis DFG berühre den Bogen in G , und die beyden Radien in D und F ; daher $EG = ED = EF = x$. Da $EDC = R = EFC = DCF$, folglich auch $DEF = R$, und überdiß $ED = EF$ ist, so ist FD ein Quadrat und $ECB = \frac{1}{2}R$. Die Linie CE geht verlängert durch den Berührungspunct G .

Nun ist $EC^2 = EF^2 + FC^2$ und

$$EC = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}.$$

Ferner ist $CG = EC + GE = x\sqrt{2} + x = a$,

folglich $x [\sqrt{2+1}] = a$ und

$$x = \frac{a}{\sqrt{2+1}} = a\sqrt{2}-a = a[\sqrt{2}-1].$$

Construction. Man halbire den rechten Winkel ACB durch GC , an G ziehe man die Tangente GH , welche die Verlängerung von CA in H schneidet, mache $CF = AH$, und errichte in F die senkrechte Linie EF . Aus E , wo letztere die Linie GC schneidet, beschreibe man mit EF einen Kreis, so muß dieser den Bogen AB in G und die beyden Radien BC und AC in D und F schneiden.

Beweis. Da $CGH = R$ und $GCH = \frac{1}{2}R$ ist, so muß $CG = GH = a$ und $CH = \sqrt{CG^2 + GH^2} = a\sqrt{2}$, mithin $FC = AH = CH - AC = a\sqrt{2} - a = x$ seyn.

Synthet. Beweis. Man fälle ED senkrecht auf BC , dann ist $EDC = R = EFC$, $DCE = ECF$ und $CE = CE$, folglich $\triangle EDC \cong \triangle EFC$, also auch $ED = EF$, d. h. der mit EF beschriebene Kreis geht durch D und berührt also AC und BC . Es ist ferner $GC = GH$, weil $HGC = R$ und $GCH = \frac{1}{2}R = GHC$ ist, auch $AH = FC$ [Constr.], folglich $HF = AC = HG$ und, wenn man FG zieht, $HGF = HFG$. Endlich ist

$$HGE = EFH = R, \text{ also auch}$$

$HGE - HGF = EFH - HFG$ oder $0 = y$, also auch $EF = EG$; d. h. der mit EF beschriebene Kreis geht auch durch einen Punct G des Quadranten.

§. 61.

Aufgabe. (Fig. 140.) Der Durchmesser eines Kreises ist gegeben; man soll die Seite des darum beschriebenen gleichseitigen Dreyeckes finden.

Auflösung. Es sey EFG das verlangte Dreyeck und $HM = d$ so wie $FG = x$. Es ist $EM = \sqrt{EF^2 - FM^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{3}$. NO ist senkrecht auf EF [§. 55. Geometrie], also $O = M = R$ und y gemeinschaftlich, folglich $\triangle EFM \cong \triangle EON$ und

$$EM : FM = EO : ON, \text{ oder}$$

$$\frac{x}{2} \sqrt{3} : \frac{x}{2} = \frac{x}{2} : \frac{1}{2} d, \text{ woraus } x = d \sqrt{3}.$$

I. Zusatz. Da $x = d \sqrt{3}$, also auch $x^2 = 3d^2$ ist, so ist auch $3d : x : d$, d. h. die Seite des regul. Dreyeckes um den Kreis ist die mittlere geometrische Proportional-Linie zwischen dem dreyfachen und einfachen Diameter. Daher ist auch die Construction leicht zu finden.

II. Zusatz. Da $\triangle EFM \sim \triangle EON$ [Aufl.] ist, so muß auch $EF : FM = EN : ON$, und, da $EF = 2FM$ ist, auch $2 : 1 = EN : \frac{1}{2}d$, mithin $EN = d$, folglich $EH = HN = NM = \frac{1}{2}d$ seyn.

§. 62.

Aufgabe. (Fig. 185.) Man soll ein rechtwinkliges Dreyeck ABC construiren, welches so beschaffen ist, daß die Linien AE und CD von den Spitzen A und C nach der Mitte der ihnen gegenüberstehenden Seiten, den gegebenen Linien m und n gleich werden.

Auflösung. (Fig. 185.) Es sey $BD = x$, also $DC^2 - BD^2 = BC^2 = n^2 - x^2$, mithin $BE^2 = \frac{1}{2}BC^2 = \frac{n^2 - x^2}{4}$.

Ferner $AE^2 = AB^2 + BE^2$, oder

$$m^2 = 4x^2 + \frac{n^2 - x^2}{4} = \frac{15x^2 + n^2}{4}, \text{ woraus}$$

$$x = \sqrt{\left[\frac{4m^2 - n^2}{15}\right]} = BD \text{ und } BC = \sqrt{n^2 - x^2} = \sqrt{\left[\frac{16n^2 - 4m^2}{15}\right]}.$$

Construction. Man ziehe GC beliebig, und errichte darauf AB senkrecht, mache $BF = \frac{1}{2}n$, schneide aus F mit m die Linie GC in I , nehme KB auf AB beliebig, schneide aus K mit $4KB$ die Linie GC in l , ziehe $IH \parallel lK$; aus H mit $\frac{1}{2}n$ durchschneide man BC in E , mache endlich $BC = 2BE$ und $AB = 4BH$, ziehe dann AC , so ist das $\triangle ABC$ das gesuchte.

Analytischer Beweis. Es ist $IF = m$ und $FB = \frac{1}{2}n$ [Constr.], folgl. $BI^2 = m^2 - \frac{1}{4}n^2$. Ferner, da $IH \parallel lK$, ist:

$IH : BH = lK : BK = 4 : 1$ [Constr.], mithin $IH = 4 BH$; dann $BI^2 = IH^2 - BH^2 = 15 BH^2 = m^2 - \frac{1}{4}n^2$, also $BH^2 = \frac{m^2 - \frac{1}{4}n^2}{15}$; es ist aber $x = 2 BH$, folglich $\frac{1}{4}x^2 = \frac{m^2 - \frac{1}{4}n^2}{15}$, woraus $x = \sqrt{\frac{4m^2 - n^2}{15}}$, wie oben, ist.

Synthetischer Beweis. Da $BD = 2 BH = \frac{1}{2}AB$ und $BC = 2 BE$ ist, so muß $DC = 2 HE = n$ seyn. — Da ferner $IH \parallel lK$ ist, so muß $IH : BH = lK : BK = 4 : 1$, also $IH = 4 BH = AB$ seyn; also $AE^2 = AB^2 + BE^2 = IH^2 + BE^2$ (Anstatt IH u. BE die Werthe nach §.80. Z. III.)

$$\begin{aligned} AE^2 &= IB^2 + BH^2 + HE^2 - BH^2 \\ &= IB^2 + HE^2 = IB^2 + \frac{1}{4}n^2 \\ &= IF^2 - FB^2 + \frac{1}{4}n^2 = IF \text{ (da } FB = \frac{1}{2}n \text{ ist);} \\ \text{also } AE &= IF = m. \end{aligned}$$

§. 63.

Aufgabe. Die drey Seiten eines Dreyeckes sind a, b, c ; man soll 1) den Radius des darum und 2) den Radius des darin beschriebenen Kreises finden.

Auflösung. 1) (Fig. 186.) Es sey $BC = a, AC = b, AB = c$. Man fälle AD senkrecht auf BC , so ist

$$\Delta ABC = \frac{a \cdot AD}{2}. \text{ Man ziehe durch } A \text{ den Diameter}$$

AE und die Linie EC , so ist, da $B = E$ und $ADB = ACE = R$ ist, $\Delta ABD \sim \Delta AEC$, also $AB : AD = AE : AC$, oder $c : AD = 2r : b$, also $AD = \frac{bc}{2r}$.

Daher $\Delta ABC = \frac{abc}{4r} = \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}$ [§. 26. g. A.], woraus

$$r = \frac{abc}{\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}} \text{ ist.}$$

Beyspiel. Für $a = 9, b = 7, c = 3$ ist $r = 5,37...$

2) (Fig. 69.) Getetzt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$,
Man construire nach §. 55. den Kreis im Dreyecke,
ziehe AD , BD und CD , und setze $FD = DG = DE$
 $= r$. Nun ist:

$$\triangle ABC = \triangle BDC + \triangle ADC + \triangle ADB = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$$

$$= r \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]} [\S. 26g.A.].$$

$$\text{Also } r = \frac{\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}}{2(a+b+c)}.$$

§. 64.

Aufgabe. (Fig. 187.) Es sind die vier Seiten eines
Viereckes im Kreise gegeben, man soll die beyden
Diagonalen und den Inhalt des Viereckes finden.

Auflösung. I. 1) Es sey $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$
und $DA = d$, dann $AC = y$ und $BD = x$. Man ma-
che $AK = DC = c$, und ziehe BK .

Es ist $\triangle ABK = \triangle DBC$, $\angle BAC = \angle BDC$, also $\triangle ABK \sim \triangle DBC$ u.
 $AB : AK = BD : DC$, folgl. $AB \cdot DC = AK \cdot BD$ od. $a \cdot c = x \cdot AN$.

Es ist $\triangle ABK = \triangle DBC$, also auch $\triangle ABK + \triangle KBD = \triangle DBC + \triangle KBD$
oder $\triangle ABD = \triangle KBC$, ferner $\angle ADB = \angle ACB$, also
 $\triangle ABD \sim \triangle NBC$ und

$AD : BD = NC : BC$, also $AD \cdot BC = BD \cdot NC$, oder

$$d \cdot b = x \cdot NC. \text{ Nun ist:}$$

$$a \cdot c = x \cdot AN, \text{ also}$$

$$d \cdot b + a \cdot c = x \cdot [AN + NC] = x \cdot y.$$

2) Da $\triangle ABD \sim \triangle BCN$ [1.] ist, so wird:

$$AB : BD = BN : BC, \text{ also } BN = \frac{AB \cdot BC}{BD}, \text{ ferner}$$

da $\triangle ANK \sim \triangle BCN \sim \triangle ABD$ ist, auch:

$$AK : KN = BD : AD, \text{ also } KN = \frac{AK \cdot AD}{BD} = \frac{DC \cdot AD}{BD},$$

$$\text{daher } BK = BN + KN = \frac{AB \cdot BC + DC \cdot AD}{BD}. \text{ Macht}$$

man auch $BF = DC$, so ist der Analogie nach:

$$AF = \frac{AB \cdot AD + DC \cdot BC}{AC}.$$

3) Nun ist $BK = AF$ [§. 57. Zus. III. G.], also :

$$\frac{AB \cdot BC + DC \cdot AD}{BD} = \frac{AB \cdot AD + DC \cdot BC}{AC} \quad [1. \text{ u. } 2.], \text{ und}$$

$$\frac{BD}{AC} = \frac{AB \cdot BC + DC \cdot AD}{AB \cdot AD + DC \cdot BC} \text{ od. } \frac{x}{y} = \frac{ab + cd}{ad + bc}, \text{ wor. (u. aus 1.)}$$

$$x = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}} \text{ u. } y = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}.$$

II. 1) Man fälle $BG = v$ und $DM = w$ auf d und b senkrecht, und setze $CM = z$, so ist, da $BAG = DCM$ ist, $\triangle ABG \sim \triangle DCM$ und $c : z = a : AG$, also $AG = \frac{a}{c} z$. Ferner ist aus $\triangle DBM$ und $\triangle DCM$:

$$x^2 = [b + z]^2 + DM^2 = b^2 + 2bz + z^2 + c^2 - z^2 = b^2 + c^2 + 2bz.$$

Ebenso aus $\triangle BGD$ und $\triangle ABG$:

$$x^2 = [d - AG]^2 + GB^2 = d^2 - 2dAG + AG^2 + a^2 - AG^2 = a^2 + d^2 - 2dAG = a^2 + d^2 - \frac{2ad}{c} z, \text{ daher:}$$

$$b^2 + c^2 + 2bz = a^2 + d^2 - \frac{2ad}{c} z, \text{ wor. } z = \frac{c}{2} \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc}.$$

2) Es ist $w = \sqrt{c^2 - z^2}$, und, da $c : w = a : v$ ist, auch

$$v = \frac{a}{c} w = \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - z^2}.$$

$$\text{Ferner } \triangle BCD = \frac{1}{2} b w \text{ und } \triangle ABD = \frac{1}{2} d v = \frac{ad}{2c} w,$$

$$\text{folgl. } ABCD = \frac{bw}{2} + \frac{ad}{2c} w = w \frac{bc + ad}{2c} = \frac{ad + bc}{2c} \sqrt{c^2 - z^2}.$$

$$\text{Nun ist } c^2 - z^2 = [c + z][c - z] =$$

$$= c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc} \right] \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc} \right] =$$

$$= c^2 \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)} \cdot \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2(ad + bc)} =$$

$$= \frac{c^2}{4(ad + bc)^2} [a + b + d - c][a + d + c - b][a + b + c - d][b + c + d - a]; \text{ also}$$

$$ABCD = \frac{1}{4} \sqrt{[(a + b + d - c)(a + d + c - b)(a + b + c - d)(b + c + d - a)]}.$$

Zusatz. Bey jedem Vierecke im Kreise ist das Product der Diagonalen gleich der Summe der Producte der gegenüberliegenden Seiten des Viereckes. [Aufl. I. 1.]

§. 65.

Aufgabe. (Fig. 187.) Aus den vier Seiten eines Viereckes, worin sich die gegenüberstehenden Winkel zu $2R$ ergänzen, soll der Radius des darum beschriebenen Kreises bestimmt werden.

Auflösung. a, b, c und d seyen die vier Seiten, r der verlangte Radius und $BD = x$. Es ist nach

§. 63. $\triangle BCD = \frac{bcx}{4r}$ und $\triangle ABD = \frac{adx}{4r}$, also $ABCD =$

$$\frac{(ad+bc)x}{4r} = \frac{\sqrt{[(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)]}}{4r} \quad [\S. 64. I. 3.].$$

Setzt man diesen Ausdruck nun gleich dem für $ABCD$ in §. 64. II. 2.; so entsteht daraus:

$$r = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)}}.$$

§. 66.

Aufgabe. Von einem Vierecke, welches sowohl in als um einen Kreis sich befindet, sind drey Seiten a, b und c gegeben; man soll 1) die vierte Seite, 2) den Inhalt M , 3) den Radius R des darum 4) den r des darin beschriebenen Kreises und 5) die Diagonalen des Viereckes bestimmen.

Auflösung. (Fig. 188.) Es sey $AB = a, BC = b, CD = c, AD = x$, dann $AN = BN = CN = DN = R$ und $EM = FM = GM = HM = r$, so wie $AC = y$ und $BD = x$.

1) Da

$EM = FM$ ist, so muß $\triangle BEM \cong \triangle BMF$ u. $BE = BF$ seyn
 $FM = MG$ » » » $\triangle MFC \cong \triangle MGC$ » $GC = FC$ »
 $MG = MH$ » » » $\triangle MDG \cong \triangle MHD$ » $GD = HD$ »
 $HM = ME$ » » » $\triangle MHA \cong \triangle MAE$ » $AE = HA$ »

folg. ist $BE + GC + GD + AE = BF + FC + HD + HA$

oder $a + c = b + x$, woraus $x = a + c - b$ ist.

2) Substituirt man diesen Werth von x für d in §. 64. II. 2., so wird:

$ABCD = \sqrt{abc[a+c-b]} = \sqrt{abcx} = M$, und dann nach §. 65.

$$3) R = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(ab+cx)(ac+bx)(ax+bc)}{abcx}}.$$

4) Da $\triangle ABM + \triangle BMC + \triangle CMD + \triangle DMA = ABCD$

ist, so ist auch $\frac{(a+b+c+x)r}{2} = M = \sqrt{abcx}$,

woraus $r = \frac{2\sqrt{abcx}}{(a+b+c+a+c-b)} = \frac{\sqrt{abcx}}{a+c}$ ist.

5) Die Werthe der Diagonalen x und y sind aus §. 64. I. leicht zu finden.

Zusatz. Bey jedem Vierecke, in welchem ein Kreis beschrieben ist, ist die Summe der beyden gegenüberstehenden Seiten gleich, [Aufl. 1.]

§. 67.

Aufgaben. (Fig. 180.) 1) Es sind zwey Punkte A und B und eine gerade Linie CD gegeben; man soll in CD einen Punct H finden, welcher von A und B gleichweit absteht.

Auflösung. Da die beyden Punkte A und B gegeben sind, so sind es auch die Senkrechten $AG = a$, $BF = b$ und $FG = c$. Man setze H sey der verlangte Punct, und $FH = x$, so ist $HG = c - x$. Es soll der Aufgabe gemäß $BH = AH$ werden.

Da $BH^2 = b^2 + x^2$ und $AH^2 = a^2 + (c-x)^2$ ist, so muß $b^2 + x^2 = a^2 + (c-x)^2 = a^2 + c^2 - 2cx + x^2$

$$\text{und } x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \text{ seyn.}$$

Construction. Man ziehe AB , und errichte in dessen Mitte I die Senkrechte IH , so ist H der verlangte Punct. (Der Beweis beruht auf §. 24. Geom.).

2) Es sind zwey Punkte A und B , dann die gerade Linie CD gegeben; man soll einen Punct H in CD finden, für welchen AH und BH gleiche Neigungswinkel mit CD bilden.

Auflösung. Man fälle $AG = a$ und $BF = b$ senk-

recht auf CD , und setze $FG = c$ dann $FH = x$; so ist $HG = c - x$, und da $BHF = AHG$ seyn soll, so ist $\triangle BHF \sim \triangle AHG$, daher:

$BF : FH = AG : HG$, oder $b : x = a : c - x$, woraus

$$x = \frac{bc}{a+b} \text{ ist.}$$

Construction. Man verlängere die Senkrechte BF , mache $FK = BF$, und ziehe AK , so ist H der Durchschnittspunct, wofür $BHF = FHK = AHG$ ist.

§. 68.

Aufgabe. (Fig. 190.) In einem Dreyecke sind die geraden Linien $AD = a$, $BE = b$ und $CF = c$, von den Ecken nach den Mittelpuncten der gegenüberliegenden Seiten gegeben; man soll die Seiten $AB = x$, $BC = y$, $AC = z$ bestimmen.

Auflösung. Man fälle AG senkrecht auf CB , und setze $BG = m$, so ist:

$$\begin{aligned} a^2 &= AG^2 + GD^2 = AB^2 - GB^2 + [GB - BD]^2 \\ &= AB^2 - GB^2 + GB^2 - 2GB \cdot BD + BD^2 = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - ym \\ z^2 &= AG^2 + CG^2 = x^2 - m^2 + [y - m]^2 = x^2 - m^2 + y^2 - 2ym + m^2 = x^2 + y^2 - 2ym \end{aligned}$$

Multipliziert man die vorletzte Gleichung mit 2 und subtrahirt man davon letztere, so entsteht:

$$1) \quad 2a^2 - z^2 = x^2 - \frac{1}{2}y^2.$$

Auf ähnliche Art folgt:

$$2) \quad 2b^2 - x^2 = y^2 - \frac{1}{2}z^2, \text{ und } 3) \quad 2c^2 - y^2 = z^2 - \frac{1}{2}x^2.$$

Aus diesen drey Gleichungen ist dann:

$$x = \frac{2}{3} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}, y = \frac{2}{3} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \text{ und}$$

$$z = \frac{2}{3} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}.$$

§. 69.

Aufgabe. Von einem Dreyecke ist die Summe zweyer Seiten $= a$ und die beyden Höhen b und c auf dieselben gegeben; man soll die Seiten selbst bestimmen.

Auflösung. Gesetzt x sey die eine, folglich $a - x$ die andere Seite. Ist nun c die Höhe auf jene und b die Höhe auf diese Seite, so folgt, daß der Inhalt des

Dreieckes sowohl durch $\frac{1}{2} cx$ als auch durch $\frac{1}{2} t[a-x]$ ausgedrückt werden kann, daher $cx = b[a-x]$, woraus $x = \frac{ab}{b+c}$ und $a-x = \frac{ac}{b+c}$ ist.

Construction des Dreieckes. (Fig. 191.) Man mache $AB = b$, $BC = c$, $EAC = R$, schneide mit $DC = a$ die Linie AE in D , mache $DCF = R$, $CF = BC = c$, ziehe $GF \parallel DC$ und $HB \parallel AD$, ziehe endlich HG ; so ist $\triangle DGH$ das verlangte.

Beweis. Man fälle GI senkrecht auf DC , so ist $\triangle DGI \cong \triangle HBC$ (indem $GI = FC = BC = c$, $I = B$ und $GDI = BHC$ ist); folglich muß $GD = HC$, also $GD + DH = HC + DH = DC = a$ seyn. Ferner ist die Senkrechte $HK = AB = b$ und $GI = c$.

§. 70.

Aufgabe. Von einer Figur, z. B. von einem Rechtecke, ist der Inhalt F gegeben; man soll den dazu gehörigen Maßstab bestimmen.

Auflösung. Man nehme eine beliebige Länge, z. B. a Fuß, theile dieselbe in eine beliebige Anzahl n gleicher Theile, nehme jeden dieser Theile als Längeneinheit an, und berechne hiernach den Inhalt der gegebenen Figur; gesetzt man erhalte nicht den gegebenen Inhalt F , sondern M , so fragt sich:

1) welche Länge $= x$ hätte man, statt der von a Fuß, nehmen müssen, damit der n te Theil dieser Länge x die verlangte Einheit geworden wäre, nach welcher die Figur $= F$ ist.

2) in wieviel gleiche Theile y hätte man die willkürliche Länge a theilen müssen, damit jeder Theil die verlangte Einheit geworden wäre, nach der die Figur $= F$ ist.

ad 1) Gesetzt nach dem willkürlichen Maßstabe a enthalte die Grundlinie des Rechteckes c , und die Höhe d theile, so ist $M = cd$. — Es enthalten aber die c Theile $\frac{c}{n} a$ Fuß, die d Theile $\frac{d}{n} a$ Fuß und

der absolute Inhalt des Rechteckes ist $\frac{cd}{n^2} a^2 = \frac{M}{n^2} a^2 \square'$.
Gesetzt ferner, nach dem zu bestimmenden Maßstabe von x Fuß Länge, in n gleiche Theile getheilt, enthalte die Grundlinie des Rechteckes r , die Höhe k solche Theile, also ist $rk = F$.

Es enthalten aber die r Theile $\frac{r}{n} x$ Fuß, und die k Theile $\frac{k}{n} x$ Fuß, also das Rechteck $\frac{rk}{n^2} x^2 = \frac{F}{n^2} x^2 \square'$.

Daher die Gleichung:
 $\frac{M}{n^2} a^2 = \frac{F}{n^2} x^2$, od. $F : M = a^2 : x^2$, woraus $x = a \sqrt{\frac{M}{F}}$.

ad 2) Es ergibt sich hier der absolute Flächenraum in Quadratfuß, ein Mahl $= \frac{M}{n^2} a^2$ das andere Mahl $= \frac{F}{x^2} a^2$, woraus

$M : F = n^2 : y^2$ und $y = n \sqrt{\frac{F}{M}}$.

Jede der gefundenen beyden Formeln löset die Aufgabe, doch ist die erstere bequemer. Da sich jede geradlinige Figur in ein Rechteck gerwandeln läßt, so ist die Form der gegebenen Figur ganz gleichgültig.

Beyspiel. Der Maßstab einer nach demselben berechneten Figur von 2000 $\square^\circ$ ist verwischt oder verloren gegangen; man soll denselben durch Rechnung bestimmen.

Auflösung. Man theile eine beliebige Länge, z.B. einen Baier. Fuß, in beliebig viele gleiche Theile z. B. in 300, lasse jeden Theil eine Ruthe gelten, und berechne darnach die gegebene Figur. Gesetzt man erhalte nicht 2000, sondern 1200 $\square^\circ$. Es ist hier $a = 1$ Baier. Fuß, $F = 2000 \square^\circ$, $M = 1200 \square^\circ$ und $n = 300$, folglich aus 1):

$x = 1 \sqrt{\frac{1200}{2000}} = 0,774$, d. h. man muß nicht einen Baier. Fuß, sondern nur davon 7", 7''' 4''' in 300 gleiche Theile theilen, und jeden eine Ruthe gel-

ten lassen, um den verlangten Maßstab zu erhalten.

Für die Formel von 2) entsteht:

$$y = 300 \sqrt{\frac{2000}{1200}} = 387,298, \text{ d. h. man muß einen}$$

Baier. Fuß nicht in 300, sondern in 387,298 gleiche Theile theilen, und jeden Theil eine Ruthe für den verlangten Maßstab gelten lassen.

§. 71.

Aufgabe. Das $\triangle ABC$ (Fig. 192.) in ein Trapez zu verwandeln, in welchem $BC = a$ die eine Parallele, dann ABC und BCD die beyden anliegenden Winkel sind.

Auflösung. Man ziehe $AD \parallel BC$, setze $AD = b$, die Höhe $AG = h$, ferner ziehe man $EF \parallel BC$, betrachte BF als das verlangte Trapez, und setze $EF = y$ und $HG = x$, so entsteht die Gleichung $\frac{y+a}{2} x = \frac{ah}{2}$.

Man ziehe $IC \parallel AB$, dann ist $b-a : y-a = h : x$ [§. 83.], also $(b-a) x = (y-a) h$ und es ist $y = \sqrt{ab}$.

Construction. Man beschreibe über AD einen Halbkreis, ziehe $BK = CD$, so ist $DK = BC = a$, errichte in K auf AD die Senkrechte KL , und ziehe LD , so ist $LD = \sqrt{ab} = y$. Macht man nun $MD = LD$ und zieht man $ME \parallel CD$ und dann $EF \parallel BC$; so ist $EF = MD = LD = y$, folglich BF das verlangte Trapez.

Beweis. Man verlängere AB und CD bis sie sich in N schneiden, dann ist $\triangle EFN \sim \triangle BCN$, also:

$$\triangle EFN : \triangle BCN = EF^2 : BC^2 = LD^2 : KD^2 = AD \cdot KD : KD^2 = AD : KD$$

folgl. $\triangle EFN - \triangle BCN : \triangle BCN = AD - KD : KD = AK : BC$, oder

$$BF : \triangle BCN = AK : BC. \text{ Nun ist auch:}$$

$$\triangle ABC : \triangle BCN = AB : BN \text{ und, weil } \triangle ABK \sim \triangle BCN, \text{ auch } AB : BN = AK : BC, \text{ also } \triangle ABC : \triangle BCN = AK : BC.$$

Da nun schon $BF : \triangle BCN = AK : BC$ ist,

so muß $\triangle ABC = BF$ seyn.

Aufgabe. Jede Figur in ein gleichseitiges Dreyeck zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandle die gegebene Figur in ein Dreyeck, dessen Grundlinie $= b$ und Höhe $= h$ sey. Die Seite des verlangten Dreyeckes sey x , seine Höhe y . Dann ist $bh = xy$ und $x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2$, also hieraus $y = \sqrt{h \frac{1}{2} b \sqrt{3}}$.

Betrachtet man diese Formel, so ergibt sich, daß $\frac{1}{2} b \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{4} b^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ d. i. die Höhe eines mit der Seite b gezeichneten gleichseitigen Dreyeckes ist. Wird diese c genannt, so ist $y = \sqrt{h \cdot c}$, d. h. wenn irgend ein Dreyeck in ein gleichseitiges verwandelt werden soll, so ist dessen Höhe y die mittlere geom. Proportional-Linie zwischen der Höhe h des gegebenen Dreyeckes und der Höhe $c = \frac{1}{2} b \sqrt{3}$ des mit der Grundlinie desselben gezeichneten gleichseitigen Dreyeckes.

Construction. (Fig. 193.) Es sey ABC das gegebene Dreyeck, von welchem $BC = b$ als Grundlinie, also $AF = h$ als Höhe genommen wird. Man zeichne mit CB das gleichseitige $\triangle EBC$ und dessen Höhe ED , mache $EG \parallel DF$, also $GF = DE$ und bilde FH als mittlere geom. Proportional-Linie zwischen $AF = h$ und $GF = ED = c = \frac{1}{2} b \sqrt{3}$ [§. 80. Zus. I.]; dann ist $FH = y =$ der Höhe des zu suchenden Dreyeckes. Macht man nun $LD = FH$, und zieht man $LM \parallel EB$ und $LN \parallel EC$, so ist LMN das gesuchte Dreyeck.

Beweis.

$$\triangle ECB : \triangle LMN = ED^2 : LD^2 = GF^2 : HF^2 = GF^2 : AF \cdot GF \\ = GF : AF = ED : AF, \text{ da}$$

aber auch $\triangle ECB : \triangle ABC = ED : AF$ [§. 69. G.] ist,

so muß $\triangle LMN = \triangle ABC$ seyn.

§. 73.

Aufgabe. (Fig. 194.) Durch einen gegebenen Punct D innerhalb eines Winkels ABC eine gerade Linie EF so zu ziehen, daß dadurch ein Dreyeck DEF abgeschnitten werde, welches so groß ist als ein Parallelogramm BH .

Auflösung. Es sey $DH = a$, $GD = b$, $KF = x$ und die Senkrechte $GM = h$, so ist, wenn $DL \parallel AB$ ist, $\triangle DLF \sim \triangle BEF$, also:

$$\triangle DLF : \triangle BEF = LF^2 : BF^2 \text{ od. } (a+x)^2 : (a+b+x)^2;$$

$$\text{also } \triangle BEF = \frac{h(a+b+x)^2}{2(a+x)}.$$

Nun ist $BH = h(a+b)$,
 also $\frac{h(a+b+x)^2}{2(a+x)} = h(a+b)$, woraus $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist.

Construction. Man errichte in K eine Senkrechte $KO = GD = b$, und durchschneide aus O mit $DH = a$ die Linie BC in F , welcher Punct mit D die Richtung von EF bestimmt.

Beweis. Es ist $KF = \sqrt{OF^2 - KO^2} = \sqrt{a^2 - b^2} = x$. Auch ist:

$$\triangle KNF : \triangle EGD = KF^2 : GD^2 = a^2 - b^2 : b^2, \text{ folglich}$$

$$\triangle KNF + \triangle EGD : \triangle EGD = a^2 : b^2, \text{ nun ist auch}$$

$$\triangle DNH : \triangle EGD = a^2 : b^2, \text{ folglich:}$$

$$\triangle KNF + \triangle EGD = \triangle DNH, \text{ also auch } \triangle BEF = BH.$$

Zusatz. Der Ausdruck $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist nur möglich, wenn $a > b$ ist.

§. 74.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreyeck in ein Rechteck zu verwandeln, dessen Umfang einer gegebenen Linie ($= 4a$) gleich wird.

Auflösung. Eine Seite des Dreyeckes sey b , seine Höhe $2h$, die zu bestimmenden Seiten des Rechteckes x und y , so ist $x+y = 2a$ und $xy = bh$,

woraus $\left. \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} = a \pm \sqrt{a^2 - bh}$ ist, d. h. Man nehme den vierten Theil der gegebenen Linie und die Ka-

thete eines rechtwinkligen Dreyeckes, dessen Hypotenuse dieser vierte Theil und dessen andere Kathete die mittlere geometrische Proportionale ist zwischen der Grundlinie und halben Höhe des Dreyeckes; so ist die Summe dieser beyden Linien die grössere, die Differenz aber die kleinere Seite des gesuchten Rechteckes.

Construction. (Fig. 195.) Es sey ABC das gegebene Dreyeck und AD dessen Höhe. Man mache $BE = \frac{1}{2}AD$, beschreibe über EC einen Halbkreis, errichte $BF (= \sqrt{bh})$ senkrecht auf EC , nehme $FG = a$ dem vierten Theile des gegebenen Umfangs (dadurch wird $BG = \sqrt{a^2 - bh}$), und beschreibe damit aus G den Halbkreis HK , dann ist $BK (= GK + BG = a + \sqrt{a^2 - bh})$ die eine, und $BH (= HG - BG = a - \sqrt{a^2 - bh})$ die andere verlangte Seite. Nimmt man $BN (= BH)$ senkrecht auf BK und zieht man $MN \parallel BK$ und $KM \parallel BN$, so ist BM das verlangte Rechteck.

§. 75.

Aufgabe. (Fig. 196.) Es ist ein Winkel ABC und innerhalb desselben ein Punct D gegeben; man soll einen Kreis construiren, der durch D geht und beyde Schenkel des Winkels tangirt.

1) *Auflösung.* Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises muß nothwendig in der Halbierungslinie BN des Winkels liegen, indem beyde Schenkel desselben Tangenten werden sollen. Gesetzt E sey der gesuchte Mittelpunkt. Man fälle $DG [= h]$ senkrecht auf BN , ebenso EF auf AB , setze $BH = a$, $BG = b$, $BF = x$, $BE = y$, so ist $EF^2 = y^2 - x^2$ und $ED^2 = (b - y)^2 + h^2$, also gemäß der Aufg. $y^2 - x^2 = (b - y)^2 + h^2$. Weil nun $BE:BF = BH:BG$ ist, so ist auch $by = ax$ und aus diesen beyden Gleichungen $x = a \pm \sqrt{a^2 - b^2 - h^2}$; daher folgende

Construction. Es ist $HG^2 = a^2 - b^2$; beschreibt man über HG den Halbkreis und nimmt man $GP = GD$,

so ist $HP^2 = a^2 - b^2 - h^2$. Bildet man nun aus H mit HP einen Halbkreis, so ist F der Berührungspunct für den einen und Q der für den andern ebenfalls der Bedingung der Aufgabe entsprechenden Kreis.

Beweis. Errichtet man auf AB in F die Senkrechte FE , so muß man zeigen, daß $FE = ED$ ist. Man ziehe HE , so ist:

$$HE^2 = HF^2 + FE^2 = HP^2 + FE^2 \text{ und auch } HE^2 = HG^2 + EG^2 = HP^2 + GP^2 + EG^2 = HP^2 + DG^2 + EG^2 = HP^2 + ED^2$$

folglich $HP^2 + FE^2 = HP^2 + ED^2$, also $FE = ED$.

Anmerk. Das Geschäft wird einfacher, wenn man $HG = d$ und $GB = b$ als gegeben betrachtet und $HF = z$ setzt; dann ist $z^2 + EF^2 = d^2 + EG^2$, oder $z^2 + EF^2 = d^2 + ED^2 - h^2$. Es soll aber $EF = ED$ seyn, folglich ist $z^2 = d^2 - h^2$, wornach die Construction leichter zu übersehen ist.

2) *Auflösung.* (Fig. 196. a.) Man ziehe BD , errichte in einem beliebigen Puncte I der Linie AB eine senkrechte IK bis zur Halbierungslinie BN des Winkels ABC , beschreibe aus K mit IK den Bogen IL der BD in L schneidet, ziehe LK und $DE \parallel LK$, so ist E der Mittelpunkt des verlangten Kreises (der Beweis ist leicht zu finden.)

§. 76.

Aufgabe. (Fig. 197.) Es ist eine gerade Linie AB und in ihr ein Punct C gegeben; man soll einen Kreis construiren, der AB in C und zugleich einen gegebenen um D mit DE beschriebenen Kreis berührt.

Auflösung. Man errichte CO auf AB senkrecht, so muß der Mittelpunkt des Berührungskreises in CO liegen. Er sey F . Man setze $CF = x$, dann muß, wenn man DF zieht, auch $GF = x$ seyn. Man fälle $DH = a$ senkrecht auf AB , setze $DE = DG = r$, und $HC = b$, so entsteht, wenn man FP senkrecht auf HD fällt, $FD^2 = PF^2 + PD^2$ oder $(x + r)^2 = b^2$

$\dagger (a-x)^2$ und daraus $2(a+r)x = b^2 + a^2 - r^2$,
oder $2HKx = CD^2 - r^2 = CL \cdot CN$, oder auch,
wenn man CN in M halbt, $2HKx = 2CL \cdot CM$,
und $HKx = CL \cdot CM$, wornach x leicht zu con-
struiren ist.

§. 77.

Aufgabe. Ein Dreyeck durch drey gerade Linien
in vier congruente Dreyecke zu theilen.

Auflösung. Man halbire die drey Seiten, und
verbinde die Halbierungspuncte durch drey gerade Li-
nien. (Der Beweis ist leicht zu finden.)

§. 78.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreyeck in ein anderes
zu verwandeln, welches zwey bestimmte Winkel α und
 β hat.

Auflösung. (Fig. 198.) Es sey ABC das gegebene
Dreyeck; man trage in B und C an BC die gegebene
Winkel β und α an, und ziehe $AD \parallel BC$, DE
 $\parallel BI$, dann mache man $GC = FC = \sqrt{CE \cdot BC}$
[§. 80. Zus. I.], und ziehe $GH \parallel DE$, dann ist das
 $\triangle GHC$ das verlangte.

Beweis. Da $GH \parallel ED \parallel IB$ ist, so ist $HGC = \beta$.
Es ist $\triangle GHC : \triangle DEC = GC^2 : CE^2 = CE \cdot BC : CE^2 = BC : CE$,
aber auch $\triangle ABC : \triangle DEC = BC : CE$, also $\triangle GHC = \triangle ABC$.

§. 79.

Aufgabe. Ein Dreyeck aus einem zu bestimmen-
den Puncte innerhalb in drey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. (Fig. 199.) M sey der Punct, MN
($\parallel AB$), MO ($\parallel AC$) und AM die Theilungslinien.
Denkt man sich PQ durch $M \parallel BC$, fällt man dann
auf BC von A die Senkrechte $AR = h$ und von M die
 $MS = x$; so ist:

$\triangle MNO : \triangle ABC = 1 : 3 = x^2 : h^2$, also $x = h \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}h\sqrt{3}$.
Hiernach läßt sich die Lage von PQ construiren, in

deren Mitte der Punct M liegen muß, damit $AMNB = AMOC$ werde etc.

§. 80.

Aufgabe. Die beyden nicht parallelen Seiten eines Trapezes, seine Höhe h und Fläche m ist bekannt; man soll die parallelen Seiten bestimmen.

Auflösung. (Fig. 176.) Es sey $BD = b$, $AC = c$, $AH = h$, $AB = y$, $CD = x$ und $AI \parallel BD$; dann ist $\frac{1}{2}(x+y)h = m$, also $\frac{1}{2}(x+y) = \frac{m}{h}$. Ferner ist $CH = \sqrt{c^2 - h^2}$, $HI = \sqrt{b^2 - h^2}$, also $CI = x - y = \sqrt{c^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2}$ und $\frac{1}{2}(x - y) = \frac{1}{2}[\sqrt{c^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2}]$. Aus diesen beyden Gleichungen folgt:

$$\left. \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} = \frac{m}{h} \pm \frac{1}{2}[\sqrt{c^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2}].$$

§. 81.

Aufgabe. Innerhalb eines Dreyeckes einen Punct so zu bestimmen, daß, wenn man von demselben nach den drey Ecken gerade Linien zieht, die entstehenden Dreyecke sich wie $m : n : p$ verhalten.

Auflösung. (Fig. 199.) Man theile eine der drey Seiten des $\triangle ABC$, z. B. BC , in drey Theile nach dem Verhältnisse $m : n : p$ [§. 74. 1.], so, daß $BN : NO : OC = m : n : p$ wird, dann ziehe man $MN \parallel AB$ und $MO \parallel AC$, so ist M der verlangte Punct. (Der Beweis ergibt sich leicht, wenn man AN und AO zieht.)

§. 82.

Aufgabe. (Fig. 200.) Im $\triangle ABC$ sind die drey geraden Linien a, b, c von den Ecken nach den Mittelpuncten der gegenüberstehenden Seiten gegeben; man soll durch sie die drey Seiten x, y, z , so wie den Inhalt Q des Dreyeckes finden.

Auflösung. 1) Es ist $AE^2 = z^2 - BE^2 = a^2 - ED^2 = a^2 - [BD - BE]^2$, also $z^2 - BE^2 = a^2 - BD^2 + 2BD \cdot BE - BE^2$,

od. $z^2 = a^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^2 + z^2 - y^2}{2}$, wor. $4a^2 + x^2 = 2y^2 + 2z^2$

und der Analogie nach auch $4b^2 + y^2 = 2x^2 + 2z^2$
eben so $4c^2 + z^2 = 2x^2 + 2y^2$

also die Summe $\frac{4}{3}[a^2 + b^2 + c^2] = x^2 + y^2 + z^2$
und durch Subtraction $x^2 = \frac{4}{9}[2b^2 + 2c^2 - a^2]$, $y^2 = \frac{4}{9}[2a^2 + 2c^2 - b^2]$ und $z^2 = \frac{4}{9}[2a^2 + 2b^2 - c^2]$; (also die drey Seiten.)

2) Es ist $Q = \frac{1}{2}x \cdot AE = \frac{1}{2}x \sqrt{y^2 - \left[\frac{x^2 + y^2 - z^2}{2x}\right]^2}$
 $= \frac{1}{4} \sqrt{[4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2]}$ und da-
raus auch $4x^2y^2 = 16Q^2 + [x^2 + y^2 - z^2]^2$ oder nach 1)
 $\frac{64}{81}[2b^2 + 2c^2 - a^2][2a^2 + 2c^2 - b^2] = 16Q^2 + \frac{16}{81}[5c^2 - b^2 - a^2]^2$
(1), woraus $Q^2 = \frac{1}{9}[2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4] =$
 $= \frac{1}{9}[4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2]$ ist; also der Inhalt

$$Q = \frac{1}{3} \sqrt{[a+b+c][a+b-c][a+c-b][b+c-a]}.$$

§. 83.

Aufgabe. (Fig. 201.) Die drey Seiten $AB=c$, $BC=a$ und $AC=b$ eines Dreyeckes sind gegeben; man soll die Entfernung der Mittelpuncte des um und in dasselbe beschriebenen Kreises bestimmen.

Auflösung. Man setze $a+b+c=S$, $b+c-a=A$, $a+c-b=B$ und $a+b-c=C$. E sey der Mittelpunct des Kreises um das Dreyeck, also $EC = r = \frac{a \cdot b \cdot c}{\sqrt{[S \cdot A \cdot B \cdot C]}}$ [§. 63. 1. g. A.], und D der des Kreises im Dreyeke, also $DF = DH = \rho = \sqrt{\frac{A \cdot B \cdot C}{4S}}$ [§. 63. 2. g. A.].

Es ist $AO = AH$, $HC = FC$, $BO = BF$; also $b = CH + AH = FC + AO = a - BF + c - BF$, mithin $BF = \frac{a+c-b}{2} = \frac{B}{2}$.

Es ist ferner, wenn EG senkrecht auf a ist, $GF = BF - BG = \frac{1}{2}[a+c-b] - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}[c-b]$. — Ist x der Abstand der Mittelpuncte D und E , so ist:

$$x^2 = [DF - EG]^2 + GF^2 = \rho^2 - 2\rho \cdot EG + EG^2 + GF^2$$

$$= \rho^2 - 2\rho \sqrt{\frac{4r^2 - a^2}{4}} + r^2 - \frac{1}{4}a^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2.$$

Es ist aber:

$$-\frac{1}{4}a^2 + \frac{(c-b)^2}{4} = -\frac{B.C}{4}, \text{ folgl. } x^2 = r^2 + \rho^2 - \frac{B.C}{4} - \rho \sqrt{4r^2 - a^2},$$

ferner:

$$\rho^2 - \frac{B.C}{4} = -\frac{B.C.a}{2S} \text{ u. } \rho \sqrt{4r^2 - a^2} = \frac{a}{2S} \sqrt{4b^2c^2 - S.A.B.C.}$$

Nach §. 82. 2. g.A. ist $4b^2c^2 - [b^2 + c^2 - a^2]^2 = 16Q^2 = S.A.B.C.$ [§. 26.], also $\rho \sqrt{4r^2 - a^2} = \frac{a}{2S} [b^2 + c^2 - a^2]$;

folglich:

$$x^2 = r^2 - \frac{B.C.a}{2S} - \frac{a}{2S} [b^2 + c^2 - a^2] = r^2 - \frac{a}{2S} [B.C + b^2 + c^2 - a^2]$$

$$= r^2 - \frac{a}{2S} . 2bc = r^2 - \frac{abc}{S}; \text{ es ist aber } r.\rho = \frac{abc}{2S},$$

folglich $x^2 = r^2 - 2r\rho$ und $x = \sqrt{r[r - 2\rho]}$.

§. 84.

Aufgabe. (Fig. 201.) Verlängert man zwey Seiten AB und BC eines Dreyeckes über die dritte hinaus, so gibt es einen Kreis, dessen Mittelpunkt ausserhalb des Dreyeckes liegt, und welcher die dritte Seite und die verlängerten beyden andern tangirt; man soll dessen Halbmesser ρ' bestimmen.

Auflösung. Gesetzt K sey der Mittelpunkt des verlangten Kreises, für welchen die Senkrechten $LK = KN = KM = \rho'$ sind. Es ist $\triangle ALK \cong \triangle AKN$, $\triangle CKM \cong \triangle CKN$ und $\triangle LBK \cong \triangle BKM$, also $AL = AN$, $CM = CN$ und $BL = BM$ oder $c + AN = a + CN$ und $c + 2AN = a + AN + CN = a + b$, daher $AN = \frac{1}{2} [a + b - c] = \frac{1}{2} C$. — Ebenso ist $a = BF + FC = BO + HC = c - AH + b - AH$, woraus $AH = \frac{1}{2} [b + c - a] = \frac{1}{2} A$ ist. Nun ist $o = n$, $H = N = R$, also $\triangle ADH \sim \triangle AKN$, u. $AH : DH = KN : AN$, od.

$$\frac{1}{2} A : \rho = \rho' : \frac{1}{2} C, \text{ also } \rho' = \frac{A.C}{4\rho} = \sqrt{\frac{A.C.S}{4B}} [\text{§. 83. g.A.}].$$

Eben so hat man den Radius ρ'' für den Kreis auf

der Seite bey a , $\xi'' = \sqrt{\frac{B.C.S}{4A}}$ und den bey c , $\xi''' = \sqrt{\frac{A.B.S}{4C}}$,

Zusatz. Das Product der vier Radien ξ, ξ', ξ'', ξ''' ist $= \frac{1}{16} [A.B.C.S]$, folglich $\sqrt{\xi \cdot \xi' \cdot \xi'' \cdot \xi'''} = \frac{1}{4} \sqrt{A.B.C.S} = \Delta ABC$ [§. 26.],

§. 85.

Aufgaben. 1) Man soll in Fig. 201, die Centrallinie $EK = x'$ bestimmen [§. 84.],

Auflösung. Man fälle EI senkrecht auf AC . Es ist $AN = \frac{1}{2} [a + b - c] = \frac{C}{2}$ [§. 84.], dann $IN = AN - AI = AN - \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} [a - c]$. Es ist, wenn man EI über I verlängert bis sie die durch $K \parallel AC$ gezogene Linie schneidet, und EK zieht, $EK^2 = [EI + KN]^2 + IN^2 = [\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}b^2} + \xi']^2 + \frac{(a-c)^2}{4}$, oder:

$$x'^2 = r^2 - \frac{1}{4}b^2 + \xi' \sqrt{4r^2 - b^2} + \xi'^2 + \frac{(a-c)^2}{4}. \text{ — Es ist aber — } \frac{1}{4}b^2 + \frac{(a-c)^2}{4} = -\frac{1}{4}AC \text{ und } \xi' \sqrt{4r^2 - b^2} = \frac{b}{2B} \sqrt{4a^2c^2 - A.B.C.S};$$

ferner $4a^2c^2 - [a^2 + c^2 - b^2]^2 = 16Q^2 = A.B.C.S$ [§. 82. 2. analog.], also $\xi' \sqrt{4r^2 - b^2} = \frac{b}{2B} [a^2 + c^2 - b^2]$,

$$\begin{aligned} x'^2 &= r^2 + \xi'^2 - \frac{1}{4}A.C + \frac{b}{2B} [a^2 + c^2 - b^2] \\ &= r^2 + \frac{A.C.S}{4B} - \frac{A.C}{4} + \frac{b}{2B} [a^2 + c^2 - b^2] \\ &= r^2 + \frac{b.A.C}{2B} + \frac{b}{2B} [a^2 + c^2 - b^2] = r^2 + \frac{b}{2B} [A.C + a^2 + c^2 - b^2] \\ &= r^2 + \frac{b}{2B} . 2ac = r^2 + \frac{abc}{B}, \text{ und da } r\xi' = \frac{abc}{2B} \text{ ist,} \\ &= r^2 + 2r\xi', \text{ also } x' = \sqrt{r[r + 2\xi']}. \end{aligned}$$

Ebenso erhält man die Centrale zu r und ξ'' oder

$x'' = \sqrt{r[r+2\varphi'']}$ und die für r und φ''' oder $x''' = \sqrt{r[r+2\varphi''']}$.

2) Man soll in Fig. 201, die Centrale $DK = y'$ bestimmen. [§. 84.]

Auflösung. Es ist $HN = AN - AH = \frac{1}{2}[a+b-c] - \frac{1}{2}[b+c-a] = a-c$, dann $y'^2 = HN^2 + [DH + NK]^2 = HN^2 + [\varphi + \varphi']^2 =$

$$= [a-c]^2 + \frac{A.B.C}{4S} + \frac{A.C.S}{4B} + 2\varphi.\varphi' \text{ [§. 83 und 84.]}$$

$$= [a-c]^2 + \frac{A.C}{4BS} [B+S]^2 = \frac{b^2(a-c)^2 + b^2(a+c)^2}{BS}$$

$$= \frac{4ab^2c}{BS}, \text{ folglich } y' = 2b\sqrt{\frac{ac}{BS}}.$$

Ebenso erhält man die Centrale zwischen den Kreisen mit φ und φ'' oder $y'' = 2a\sqrt{\frac{bc}{AS}}$ und die zwischen den Kreisen mit φ und φ''' oder $y''' = 2c\sqrt{\frac{ab}{CS}}$.

§. 86.

Aufgabe. Die Seite des regulären Dreyseckes im Kreise, dessen Radius = 1 ist, zu finden.

Auflösung. (Fig. 202.) Es sey $AB = x$ die Seite eines regulären Dreyseckes, folglich ist $ADB = 120^\circ$. Man mache $BC = DC = 1$, so wird $BDC = 60^\circ$, also $ADC = 72^\circ$, und es ist die Sehne AC die Seite eines regulären Fünfeckes in diesem Kreise, mithin:

$$AC = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = a \text{ [§. 33. g. Aufg.]}$$

Es ist $AD = \frac{BC.AC.AB}{4\Delta ABC}$ [§. 63. 1. g. A.], also $\Delta ABC = \frac{1}{4}ax$.

Auch ist:

$\Delta ABC = \frac{1}{4}\sqrt{[a+1+x][a+1-x][a+x-1][1+x-a]}$ [§. 26. g. A.] also $a^2x^2 = [a+1]^2 - x^2$ und

$$x^4 - [a^2+2]x^2 + [a^2-1]^2 = 0, \text{ woraus}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}[a^2+2] - \sqrt{\frac{1}{4}[a^2+2]^2 - [a^2-1]^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+4 - 2a\sqrt{12-3a^2}} =$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{2a^2+4+4[a^2-1]}{2}} - \sqrt{\frac{2a^2+4-4[a^2-1]}{2}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} [a\sqrt{3} - \sqrt{4-a^2}] \text{ und, da } a = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \text{ ist,} \\
 &= \sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}}{8}} - \frac{1}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}}{8}} - \frac{1+\sqrt{5}}{4}.
 \end{aligned}$$

Zusatz. Nach §. 86. *Zus. H, G.* findet man durch gehörige Substitution dieses Werthes von x nach gehöriger Abkürzung die Seite des im Kreise beschriebenen regulären Fünfzehneckes, oder

$$y = \frac{1}{2} [(a^2-2)\sqrt{3+a\sqrt{4-a^2}}] = \frac{1}{2} [\sqrt{3} + \sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15}],$$

ferner nach §. 86. *G.* die Seite des regulären Sechzig-
eckes, oder

$$\begin{aligned}
 z &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - x^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{\frac{6-a^2+\sqrt{12a^2-3a^4}}{2}}} \\
 &= \sqrt{\left\{ \frac{1}{2}[4-a] - \sqrt{\frac{12-3a^2}{4}} \right\} \frac{1}{2} [\sqrt{2+a} - \sqrt{3}\sqrt{2-a}]} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{4}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{4}} - \sqrt{3} \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{4}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{4}} \right] \right) \\
 &= \frac{1}{4} [(1+\sqrt{3})\sqrt{3-\sqrt{5}} - (\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}], \text{ od. auch} \\
 &= \frac{1}{4} [(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}})(\sqrt{5}-1) - (\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}].
 \end{aligned}$$

Constructions-Aufgaben.

§. 87.

Aufgabe. Es ist ein Dreyeck gegeben; man soll ein anderes gegebenes Dreyeck so verwandeln, daß es mit dem ersteren ähnlich wird.

Auflösung. (Fig. 203.) Man verwandle das letztere Dreyeck in das $\triangle ABC$ so, daß es mit dem ersteren $\triangle AFG$ einen Winkel gemein hat [§. 49. 2. G.]; ziehe $BD \parallel FG$, beschreibe über AC einen Halbkreis, errichte DK senkrecht auf AC , und mache $AP = AK$, so ist, wenn man $PQ \parallel FG$ zieht, das $\triangle AQP$ das verlangte.

Beweis. Da $PQ \parallel FG$ ist, so ist $\triangle AQP \sim \triangle AFG$. Ferner ist $AD:AK:AC$, also $AD.AC = AK^2 = AP^2$, aber

$$\triangle AQP : \triangle ABD = AP^2 : AD^2 = AD \cdot AC : AD^2 = AC : AD$$

$$\triangle ABC : \triangle ABD = AC : AD \quad [\S. 68. G.]$$

folgl. $\triangle ABC = \triangle AQP$.

§. 88.

Aufgabe. Es ist innerhalb eines Kreises ein Punct gegeben; man soll durch ihn eine Linie von gegebener Länge als Sehne in den Kreis legen.

Auflösung. (Fig. 204.) Es sey E der gegebene Punct, AB die Sehne. Man trage diese beliebig in den Kreis als Sehne z. B. in CD , fälle vom Mittelpuncte des Kreises I auf CD die Senkrechte IK und beschreibe damit aus I einen Kreis. An diesen ziehe man von E die Tangente EH , verlängere sie, so ist FG die verlangte Sehne. (Der Beweis ergibt sich, wenn man IL senkrecht auf FG fällt, und findet daß $IL = IK$ ist [$\S. 57. \text{Zus. II. G.}$].)

§. 89.

Aufgabe. (Fig. 205.) Die Summe zweyer Seiten eines Dreyeckes sey a , die dritte b und ihr anliegender Winkel α , man soll das Dreyeck construiren.

Auflösung. Man zeichne $ABC = \alpha$, mache $BD = a$, $BE = b$, ziehe ED , halbire sie in F und errichte FG darauf senkrecht, so ist, wenn man EG zieht, das $\triangle BEG$ das verlangte.

Beweis. Es ist $GD = EG$ und $BG + EG = BG + GD = BD = a$ etc.

§. 90.

Aufgabe. Es ist die Summe zweyer Seiten a , die dritte b und der ihr gegenüberliegende Winkel α ; man soll das Dreyeck construiren.

Auflösung. (Fig. 206.) Man mache $ABC = \alpha$, $BC = a$ und halbire ABC durch BD , schneide diese aus C mit b in D und E , und ziehe EF oder $DG \parallel AB$, so ist das $\triangle EFC$ oder $\triangle DGC$ das verlangte.

Beweis. Jedes der so eben genannten Dreyecke entspricht der Bedingung der Aufgabe; denn es ist $DC = EC = b$, ferner, da $AB \parallel EF \parallel DG$ ist, $BEF = EBF = \frac{1}{2}\alpha$, also $EF = BF$, $EFC = \alpha$ und $EF + FC = BC = a$; ebenso $BDG = DBG = \frac{1}{2}\alpha$, also $DG = BG$, $DGC = \alpha$ und $DG + GC = BC = a$. Beyde Dreyecke EFC und DGC sind congruent, denn zieht man $ab \parallel BC$, so ist $bED = EDb = \frac{1}{2}\alpha$ und da $DEC = EDC$ ist, auch $bDC = bEC = ECF$, ferner $DC = EC$, $DGC = EFC$, mithin $\triangle DGC \cong \triangle EFC$.

§. 91.

Aufgabe. Es ist die Differenz zweyer Seiten d , der der kleineren derselben gegenüberliegende Winkel α und die dritte Seite b gegeben; man soll das Dreyeck construiren.

Auflösung. (Fig. 207.) Man trage an $BC = b$ den Winkel $DBC = \alpha$, mache $BD = d$, ziehe DC , errichte auf ihrer Mitte E die Senkrechte EA , verlängere BD bis sie letztere schneidet, und ziehe AC , so ist ABC das verlangte Dreyeck. (Der Beweis ist leicht zu finden.)

I. Zusatz. Soll α der grösseren Seite gegenüberliegen, so mache man (Fig. 208.) $AB = b$, $BAF = \alpha$, $AD = d$, ziehe DB , errichte auf ihrer Mitte E die Senkrechte EC bis an den Durchschnittspunct C mit DF , ziehe endlich CB , so ist ABC das verlangte Dreyeck. (Auch hier ist der Beweis leicht.)

II. Zusatz. Soll α der Seite b gegenüberliegen, so mache man (Fig. 209.) $DC = d$, $GDC = R$, $EDG = \alpha$, halbire α durch FD , durchschneide diese mit b aus C in A , ziehe AC , halbire AD in I , und errichte BI darauf senkrecht bis an den Durchschnitt B der Richtung DC ; endlich ziehe man AB , so ist ABC das verlangte Dreyeck. Denn es ist $IBD \perp IDB$

$= R = IDB + IDG$, also $IBD = IDG = \frac{1}{2} \alpha$ und $ABC = \alpha$ der Seite $AC = b$ gegenüber. Auch ist $AB = BD$, folglich $d = DC = BC - BD = BC - AB$.

§. 92.

Aufgabe. Es soll ein Dreyeck construiert werden, wovon die Summe zweyer Seiten a , die dritte b , und die Differenz der ihr anliegenden Winkel α ist.

Auflösung. (Fig. 210.) Man mache $AB = b$, $ABD = \alpha$, halbire α durch EB , mache $EBF = R$, durchschneide BF aus A mit a in G , errichte in der Mitte H von BG auf diese HC senkrecht bis sie AG in C schneidet, so ist ABC das verlangte Dreyeck.

Beweis. Es ist klar, daß $AB = b$, und, da $CG = CB$ ist, daß $AC + CB = AC + CG = AG = a$ ist; es ist nur noch zu zeigen, daß $\beta - \gamma = \alpha$ ist. Der Constr. gemäß ist $CH \perp EB$, also $BCH = EBC = \frac{1}{2} \alpha + \gamma$ und $BCG = \alpha + 2\gamma = \beta + \gamma$, daher $\alpha = \beta - \gamma$.

§. 93.

Aufgabe. Man soll ein Dreyeck construiren, worin eine Seite a , dann die von ihren Endpuncten auf die beyden andern Seiten gefällten Senkrechten b und c sind.

Auflösung. (Fig. 211.) Man mache $AB = a$, beschreibe darüber einen Halbkreis, mache die Sehne $AD = b$, und die $BE = c$, ziehe DB und AE und verlängere beyde bis zum Durchschnittspuncte C , so ist ABC das verlangte Dreyeck. (Der Beweis ist leicht.).

§. 94.

Aufgabe. Es werde ein Dreyeck consruirt, dessen Grundlinie a , Höhe b und der, der Seite a entgegentehende, Winkel α werde.

Auflösung. (Fig. 212.) Man mache $AB = a$, $AD = DB$, $EDB = R$, $ED = b$, ziehe durch E die Linie $FG \perp AB$, mache $BAH = \alpha$, errichte in A auf AH die Senkrechte AI bis sie ED schneidet, beschreibe

mit AI einen Kreis, und ziehe von C oder K nach A und B Linien; so ist ABC das gesuchte Dreyeck.

Beweis. $AB = a$ ist Grundlinie und $ED = b$ die Höhe des Dreyeckes, dann $ACB = BAH = \alpha$. [§. 59. Geom.]

§. 95.

Aufgabe. Man coustruire das Dreyeck, welches die Seite a , die dazu gehörige Höhe b , und noch eine der beyden andern Höhen $= c$ hat.

Auflösung. (Fig. 213.) Man mache $AB = a$, $ABD = R$, $BD = b$, ziehe $DE \parallel AB$, beschreibe über AB einen Halbkreis, trage darein, von A aus, $AF = c$ als Sehne, ziehe BF bis C und dann AC , so ist ABC das verlangte Dreyeck. (Der Beweis hat keine Schwierigkeit.)

§. 96.

Aufgabe. Es werde ein Dreyeck construiert, bey welchem α ein Winkel, a die Höhe auf einem seiner Schenkel und b die Höhe aus dem Scheitel von α auf die Gegenseite ist.

Beweis. (Fig. 214.) Es sey $ABD = \alpha$; man mache $EBD = R$, $EB = a$, ziehe durch E , $EA \parallel BD$, beschreibe über AB einen Halbkreis, und durchschneide diesen aus B mit $BF = b$; ziehe endlich AF bis C , dann ist $\triangle ABC$ das verlangte. (Der Beweis ist leicht.)

§. 97.

Aufgabe. Man construire ein Dreyeck, bey welchem die Summe zweyer Seiten a , die Höhen auf diese beyden b und c sind. [§. 69. g. A.]

Auflösung. (Fig. 191.) Man mache $AB = b$, $BC = c$, $EAC = R$, schneide AE aus C mit a in D , ziehe $DC = a$, mache $DCF = R$ und $FC = c$, ziehe $GF \parallel DC$, so entsteht der Durchschnittspunct G ; errichte endlich HB in B senkrecht auf AC , so entsteht ein Durchschnitt in H , und es ist, wenn man GH zieht, das $\triangle DGH$ das verlangte.

Beweis. Man fälle GI und HK senkrecht auf DH und DG , so ist $GI = FC = c$, und $HK = AB = b$. Es ist ferner $GDI = BHC$, $GI = FC = BC = c$ und $I = B = R$, folglich $\triangle GDI \cong \triangle HBC$, also $GD = HC$, und $GD + DH = HC + DH = DC = a$.

§. 98.

Aufgabe. Es werde ein Dreyeck mit den beyden Winkeln α und β construirt, dessen Umfang a ist.

Auflösung. (Fig. 215.) Man mache $MN = a$, $OMN = \alpha$, $PNM = \beta$, halbire diese beyden Winkel, durch den Durchschnittspunct A ziehe man $AB \parallel OM$ und $AC \parallel PN$, so ist ABC das verlangte Dreyeck. (Der Beweis ist leicht.)

§. 99.

Aufgabe. Es werde ein Dreyeck construirt, bey welchem die Summe der Seiten a , ein Winkel α , und eine von den beyden diesem Winkel gegenüberliegenden Höhen b ist.

Auflösung. (Fig. 216.) Man mache $MN = a$, $MNO = R$, $ON = b$, $OP \parallel MN$, $MNQ = \alpha$, $ANQ = ANM = \frac{1}{2}\alpha$, ziehe AM , dann $AB \parallel QN$, mache $AD = DM$ und $ADC = R$, und ziehe AC , so ist ABC das Dreyeck. (Der Beweis hat keine Schwierigkeit.)

Zusatz. Soll eine Höhe b durch die Winkelspitze von α gehen und ist a die Summe der Seiten, so mache man (Fig. 217.) $MN = a$, $MNO = R$, $NO = b$, $PG \parallel MN$, $NMU = \frac{1}{2}\alpha$, $MD = DN$, $MDU = R$, beschreibe aus U mit UM einen Kreishogen, ziehe AM und AN , halbire diese in G und F , und errichte darauf die Senkrechten GB und FC ; ziehe endlich AB und AC , so ist ABC das verlangte Dreyeck. (*Beweis.*) Dafs $ON = b$ die Höhe von A auf BC ist, ist klar, ebenso dafs $AB + BC + AC = MB + BC + CN = a$ ist. Um zu zeigen, dafs $BAC = \alpha$ ist, ziehe man AU , so ist, da $AU = MU$ ist, $MAU = AMU$, ebenso $BAM = AMB$, folglich $MAU =$

$BAM \equiv AMU \equiv AMB$, oder $BAU \equiv BMU \equiv \frac{1}{2} \alpha$.
Ebenso ergibt sich, daß $CAU \equiv \frac{1}{2} \alpha$ ist, also $BAC \equiv \alpha$.
§. 100.

Aufgabe. Man soll ein Viereck construiren, bey welchem drey Seiten a, b, c und zwey einander gegenüberliegende Winkel α und β sind.

Auflösung. Mit a, b und dem eingeschlossenen Winkel α zeichne man ein Dreyeck; mit der erhaltenen dritten Seite desselben und mit c und β ebenfalls ein anderes Dreyeck, in welchem aber β der dritten Seite des ersteren Dreyeckes gegenübersteht, und setze beyde Dreyecke mit dieser Seite zusammen.

§. 101.

Aufgabe. Man construire ein Viereck, welches die drey Winkel α, β, γ und als zwey gegenüberstehende Seiten a und b hat.

Auflösung. (Fig. 218.) Man mache $AB \equiv a$, zeichne daran α und β , setze an den Schenkel AF in irgend einem Punkte z. B. F den Winkel γ an, mache $FE \equiv b$, $CE \parallel AF$ und durch den Durchschnittspunct C , $CD \parallel FE$, so ist auch $ADC \equiv \gamma$ und $DC \equiv FE \equiv b$, also BD das verlangte Viereck.

§. 102.

Aufgabe. Man construire ein Viereck, bey welchem a, b, c drey Seiten, und α und β die zwey an der vierten Seite anliegenden Winkel sind.

Auflösung. (Fig. 219.) Man trage an die Endpunkte einer beliebigen Linie AN die Winkel α und β an, mache $AB \equiv a$, $NP \equiv c$, $QP \parallel AN$, durchschneide mit b aus B die Linie QP in C , ziehe BC und dann $CD \parallel NP$; so ist BD das verlangte Viereck. (Der Beweis ist leicht.)

§. 103.

Aufgabe. Es werde ein Viereck construirt, bey welchem a, b zwey Seiten und α der eingeschlosse-

ne Winkel dann β und γ jene zwey Winkel sind, welche die durch den Scheitel von α gehende Diagonale an der gegenüberstehenden Ecke bildet.

Auflösung. (Fig. 220.) Man mache $AB = a$, $ABC = \alpha$, $BC = b$, ziehe AC , mache ferner $ACE = \beta$, $CAE = \gamma$, beschreibe durch A , E und C einen Kreis, ziehe von E durch B die Linie ED , dann AD und DC , so ist $ABCD$ das verlangte Viereck. Denn es ist $ADE = ACE = \beta$ und $EDC = CAE = \gamma$.

§. 104.

Aufgabe. (Fig. 221.) Es ist ein rechter Winkel ABC und in seinem Schenkel ein Punct D gegeben, man soll einen Kreis beschreiben, welcher CB tangirt, durch den Punct D geht und zwar so, daß die Tangente des Kreises in D mit BD einen gegebenen Winkel α bilde.

Auflösung. Man trage an DB den Winkel $EDB = \alpha$, mache $EF = ED$, und errichte auf diesen beyden Linien in F und D Senkrechte; ihr Durchschnittspunct G ist dann der Mittelpunkt und GF und GD sind die Radien des Kreises.

Beweis. Man ziehe GE , so ist $\triangle GEF \cong \triangle GED$ [§. 30. Zus. II.G.], also $GF = GD$. Weil $GFB = R$ ist, so ist FB eine Tangente. Daß EDB der verlangte Winkel ist, erhellet aus der Construction.

Stereometrische Aufgaben.

§. 105.

Aufgabe. Eines senkrechten Kegels Radius r und Höhe h ist gegeben; man soll den Radius x eines Cylinders mit der Höhe m finden, dessen krumme Seitenfläche der des Kegels gleicht.

Auflösung. Es ist die krumme Seitenfläche des Cylinders $= 2x\pi m$ und die des Kegels $= r\pi\sqrt{h^2 + r^2}$

[§. 128. Zus.], daher $2x\pi m = r\pi\sqrt{h^2 + r^2}$, woraus $x = \frac{r}{2m}\sqrt{h^2 + r^2}$.

Zusatz. Für den Fall, daß der Radius y eines Kegels mit der Höhe h , dessen krumme Seitenfläche mit der eines Cylinders mit der Höhe m und dem Radius ρ gleich ist, gesucht werden soll, ist:

$$2\rho\pi m = y\pi\sqrt{h^2 + y^2}, \text{ folglich}$$

$$y = \sqrt{\left[-\frac{1}{2}h^2 + \sqrt{4\rho^2 m^2 + \frac{1}{4}h^4}\right]}.$$

§. 106.

Aufgabe. Der Radius einer Kugel ist r ; man soll den Radius x eines Kegels mit der Höhe h finden, dessen krumme Seitenfläche der Oberfläche der Kugel gleicht.

Auflösung. Es ist die Oberfläche der Kugel $4r^2\pi$ und die krumme Fläche des Kegels $x\pi\sqrt{h^2 + x^2}$; also $4r^2\pi = x\pi\sqrt{h^2 + x^2}$, woraus

$$x = \sqrt{\left[-\frac{1}{2}h^2 + \sqrt{16r^4 + \frac{1}{4}h^4}\right]} \text{ ist.}$$

§. 107.

Aufgabe. Einer Kugel Durchmesser sey R ; man soll den Radius x der obern Grundfläche eines abgekürzten Kegels finden, dessen Höhe h und Radius der untern Grundfläche r ist, und welcher am körperlichen Inhalte obiger Kugel gleicht.

Auflösung. Es ist der Inhalt des abg. Kegels $= \frac{1}{3}\pi h[r^2 + rx + x^2]$ und der der Kugel $= \frac{4}{3}R^3\pi$. Daher $\frac{1}{3}\pi h[r^2 + rx + x^2] = \frac{4}{3}R^3\pi$, woraus:

$$x = -\frac{1}{2}r + \sqrt{\left(\frac{4R^3}{h} - \frac{3}{4}r^2\right)}.$$

§. 108.

Aufgabe. Man soll einen gegebenen Kegel durch eine Ebene, parallel zur Grundfläche, so theilen, daß der oben abgeschnittene Kegel den Inhalt m erhalte, wie groß ist die Höhe des letzteren zu nehmen.

Auflösung. (Fig. 124.) bc sey $[\# BC]$ der Durchschnitt, $Ad = x$, dann $AD = h$, $DC = r$, so ist Kegel $ABC \sim$ Kegel Abc [§. 147. Zus. III.]; folglich $ABC : Abc = h^3 : x^3$ [§. 148. Zus. III.], oder

$$\frac{1}{3} r^2 \pi h : m = h^3 : x^3, \text{ woraus } x = \sqrt[3]{\frac{3h^2 m}{r^2 \pi}} \text{ ist.}$$

§. 109.

Aufgabe. (Fig. 118.) Der Diameter einer Kugel sey d ; wenn man die Seite $AB = x$ des in ihr Construirten Cubus finden.

Auflösung. Ist AH ein in einer Kugel construirter Cubus, so müssen alle seine Ecken die Oberfläche der Kugel berühren, und CF der Diameter d der Kugel seyn. Es ist:

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = CD^2 + BD^2 + BF^2 \text{ oder}$$

$$d^2 = 3x^2, \text{ also } x = d \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} d \sqrt{3}.$$

Es verhält sich daher auch die Seite des Kubus zum Diameter der Kugel wie $\frac{1}{3} d \sqrt{3} : d$ oder $1 : \sqrt{3}$.

§. 110.

Aufgabe. Der Diameter einer Kugel ist d ; man soll die Seite x eines in derselben beschriebenen Tetraeders bestimmen.

Auflösung. (Fig. 222.) $ABCD$ sey das Tetraeder und jede seiner Seiten $= x$. Man falle $AG = d$ senkrecht auf die Ebene BDC , so ist die Mitte E von AG der Mittelpunkt der Kugel und F der des Kreises um das gleichseitige $\triangle BDC$, dessen Radius $FC = \sqrt{\frac{x^2}{3}}$ [§. 29. 1. g. A.] ist. — Man setze $AF = z$, so ist $FG = d - z$, und, da $AFC = R$ ist, $AF^2 = AC^2 - FC^2$, oder $z^2 = x^2 - \frac{x^2}{3} = \frac{2}{3} x^2$ und $z = \sqrt{\frac{2}{3}} x^2$.

Ferner ist:

$$AF : FC : FG \text{ [§. 80. Zus. II.] oder } z : \sqrt{\frac{x^2}{3}} : d - z, \text{ also}$$

$$dz - z^2 = \frac{x^2}{3}, \text{ oder } dz - \frac{2}{3} x^2 = \frac{x^2}{3}, \text{ folglich } dz = x^2$$

oder $d \sqrt{\frac{2}{3}} x^2 = x^2$, woraus $x = d \sqrt{\frac{2}{3}}$ ist.

Zusatz. Es verhält sich der Diameter der Kugel zur Seite des Tetraëders wie

$$d : d \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{3} : \sqrt{2}.$$

§. 111.

Aufgabe. Aus dem Diameter d der Kugel die Seite des darin beschriebenen Octaëders zu finden.

Auflösung. (Fig. 223.) AGDFEC sey das Octaëder und jede seiner Seiten $= x$. Man fälle AF $= d$ senkrecht auf DE und ziehe BC, so ist AB $= BC = \frac{1}{2} d$ und ABC $= R$, folglich $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$ oder $x = \sqrt{\frac{1}{2} d^2} = \frac{1}{2} d \sqrt{2}$.

Zusatz. Es verhält sich der Diameter der Kugel zur Seite des Octaëders, wie $d : \frac{1}{2} d \sqrt{2} = \sqrt{2} : 1$.

§. 112.

Aufgabe. Aus dem Diameter d einer Kugel die Seite des darin construirten Ikosaëders zu bestimmen.

Auflösung. (Fig. 224.) Es sey AECD das Ikosaëdron, x seine Seite, M der Mittelpunkt der darum beschriebenen Kugel, also AC die Achse derselben. Man lege durch ELDGF eine Ebene, so entsteht das reguläre Fünfeck ELDGF, dessen Seite $= x$ ist, und auf dessen Mitte B die Achse AC der Kugel senkrecht steht. Man ziehe BD, so ist diese Linie der Radius des um das reguläre Fünfeck beschriebenen Kreises,

also $BD = x \sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}}$ [§. 33. g. A.]. Es sey AB $= y$,

so ist: AB : AD : AC [§. 80. Zus. I.], oder $y : x : d$,

also $y = \frac{x^2}{d}$; ferner, da ABD $= R$ ist, $AD^2 = BD^2$

+ AB², oder $x^2 = \frac{2x^2}{5 - \sqrt{5}} + \frac{x^4}{d^2}$, woraus

$$x = d \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}.$$

Zusatz. Der Diameter der Kugel verhält sich zur

$$\begin{aligned} \text{Seite des Ikosaëders, wie } d : d \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} &= \\ &= 1 : \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}, \text{ oder } = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} : 1. \end{aligned}$$

§. 113.

Aufgabe. Man soll aus dem Diameter d einer Kugel die Seite des darin beschriebenen Dodekaëders bestimmen.

Auflösung. (Fig. 225.) Es sey ZDC das Dodekaëder, x seine Seite und A der Mittelpunkt der Kugel, so wie SG $= d$ ihre Achse, senkrecht auf der Seitenfläche DEFCY. Man lege parallel zu zwey Seitenflächen DEFCY und TZUWV durch A eine Ebene, so schneidet diese alle übrigen zehn Fünfecke immer in der Mitte zweyer Seiten. Die dadurch entstehende Durchschnitsfigur ist daher ein reguläres Zehneck HKLMNIOPQR, dessen Seite der halben Diagonale der begrenzenden Fünfecke des Dodekaëders gleicht. — Man ziehe BC, so ist diese Linie Radius des um das Fünfeck beschriebenen Kreises; daher

$$BC = x \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} [\S. 33. \text{ g. A.}].$$

Die halbe Diagonale des Fünfeckes, oder eine Seite des regulären Zehneckes $S = \frac{x}{2BC} \sqrt{4BC^2 - x^2} [\S. 86.$

$$\begin{aligned} \text{Zus. II.}] &= \frac{x}{2} \sqrt{4 - \frac{x^2}{BC^2}} = \frac{x}{2} \sqrt{4 - \frac{5-\sqrt{5}}{2}} = \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}. \end{aligned}$$

Der Radius für dieses reguläre Zehneck, dessen Seite S ist, oder $R = \frac{S}{2} [\sqrt{5} + 1]$

$$[\S. 31. \text{ g. A.}] = \frac{x}{4} [3 + \sqrt{5}].$$

Man ziehe AX nach der Mitte von DY und dann XB und BY, so ist auch AX $= R$ und, da BXY $= 90^\circ$

$$\text{ist, } XB = \sqrt{BY^2 - XY^2} = \sqrt{BC^2 - \frac{1}{4}x^2} = x \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}};$$

also, indem $ABX = 90^\circ$, $AB = \sqrt{AX^2 - XB^2} =$
 $= \sqrt{R^2 - XB^2} = x \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}.$

Es ist $SB = \frac{1}{2}d + AB$, also $BG = \frac{1}{2}d - AB$; fer-
 ner $SB:BC:BG$ [§. 80. Zus. II.], also $BC^2 = SB.BG$
 oder $\frac{2x^2}{5 - \sqrt{5}} = \frac{1}{4}d^2 - \frac{x^2}{40} [25 + 11\sqrt{5}]$, woraus
 $x = d \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}}$ ist.

§. 114.

Aufgabe. Aus der Seite a eines Tetraëders dessen
 körperlichen Inhalt zu bestimmen.

Auflösung. [Fig. 222.] Man fälle AF senkrecht auf
 BDC und ziehe FC , so ist $FC = \sqrt{\frac{a^2}{3}}$ [§. 29. 1.g. A.],
 dann $AF = \sqrt{AC^2 - FC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}a^2} = a \sqrt{\frac{2}{3}}.$

Der Inhalt des Dreyeckes $BDC = \frac{1}{4}a^2 \sqrt{3}$ [§. 26, Zus. II.];
 folglich das Tetraëder $= \frac{1}{3} \triangle BDC . AF$ [§. 154.] =
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \cdot a \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}.$

§. 115.

Aufgabe. Aus der Seite a des Octaëders dessen
 körperlichen Inhalt bestimmen.

Auflösung. [Fig. 223.] Man fälle AB senkrecht
 auf die Ebene DE und ziehe BC , so ist $AB = BC =$
 $= \sqrt{\frac{1}{2} AC^2} = a \sqrt{\frac{1}{2}}$; ferner $DE = a^2$ und $ADCEG =$
 $= \frac{1}{3} DE . AB = \frac{1}{3} a^3 \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} a^3 \sqrt{2}$ und $ADCEGF =$
 $= \frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}.$

§. 116.

Aufgabe. Aus der Seite a des Ikosaëder dessen
 körperlichen Inhalt zu finden.

Auflösung. [Fig. 224.] Das Ikosaëder besteht aus
 zwanzig Pyramiden, welche mit der Spitze im
 Mittelpunkte der darum beschriebenen Kugel zu-

sammenstossen und deren Grundfläche eine Seitenfläche des Ikosaëders ist. Eine solche Pyramide ist $AMGD$. Man fälle MN senkrecht auf AGD , und

ziehe NG ; so ist $MG = AM$, $BD = a \sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}}$

[§. 112. g. A.], ferner $AD = a$, also $AB = \sqrt{a^2 - BD^2} =$
 $= a \sqrt{1 - \frac{2}{5 - \sqrt{5}}} = a \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}}$, dann

$AB : AD : AC$ oder $AB : a : 2 MG$, woraus $MG = \frac{a}{2 AB} =$

$= \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}}$, endlich $NG = a \sqrt{\frac{1}{3}}$ [§. 29. 1. g. A.],

mithin die Höhe der Pyramide oder

$$MN = \sqrt{MG^2 - GN^2} = \sqrt{\left\{ \frac{1}{4} a^2 \frac{5 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} - \frac{a^2}{3} \right\}} =$$

$$= a \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{12 [3 - \sqrt{5}]}} = \frac{a [3 + \sqrt{5}]}{4 \sqrt{3}}. \text{ Die Grundfläche}$$

$AGD = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$ [§. 26. Z. II. g. A.], folglich das Ikosaëder selbst oder $Q = 20 \cdot AMGD =$

$$= 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} \cdot a \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{4 \sqrt{3}} = \frac{5}{12} a^3 [3 + \sqrt{5}].$$

§. 117.

Aufgabe. Aus der Seite a eines Dodekaëders dessen körperlichen Inhalt zu bestimmen.

Auflösung [Fig. 225.] Das Dodekaëder besteht aus zwölf Pyramiden $ADEFCY$, deren Grundfläche

$$DEFCY = m = \frac{5}{4} a \sqrt{4 BC^2 - a^2} \text{ [§. 99. Geom.]}$$

$$\text{ist, und, da } BC^2 = \frac{2 a^2}{5 - \sqrt{5}} = a^2 \frac{10 + 2\sqrt{5}}{20} \text{ [§. 33. g. A.]}$$

$$\text{ist, auch } m = \frac{5}{4} a^2 \sqrt{\left\{ \frac{10 + 2\sqrt{5}}{5} + 1 \right\}} =$$

$$= \frac{5}{4} a^2 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}.$$

Es ist ferner $AB = a \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}$ [§. 113. g. A.],
 folglich das Dodekaëder, oder $Q = 12 \cdot \frac{1}{2} m \cdot AB =$
 $= 4m \cdot AB = 5a^3 \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \cdot \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}} =$
 $= \frac{5}{2} a^3 \sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}} = \frac{5}{2} a^3 \frac{15+7\sqrt{5}}{10} =$
 $= \frac{1}{2} a^3 [15+7\sqrt{5}].$

Inhalt.

Geometrie.

Einleitung	Seite 1.	§. 1.
----------------------	----------	-------

I. Theil.

Von Linien und Flächen.

I. Abschnitt. Von Linien und Winkeln überhaupt	Seite 2.	§. 4.
II. Abschnitt. Von den Figuren überhaupt, dann von den Eigenschaften der Drey-ecke und der dabey vorkommenden Linien und Winkel	Seite 5.	§. 11.
III. Abschnitt. Von den Parallellinien.	Seite 21.	§. 32.
IV. Abschnitt. Von den Eigenschaften der Parallelogramme	Seite 27.	§. 41.
V. Abschnitt. Von der Lage und Grösse der geraden Linien in Bezug auf den Kreis	Seite 36.	§. 52.
VI. Abschnitt. Von den Verhältnissen der Linien und von der Aehnlichkeit der Figuren	Seite 46.	§. 67.
VII. Abschnitt.		
A. Messung der geraden und Kreis-Linien, so wie auch der Winkel.	Seite 59.	§. 88.
B. Berechnung der ebenen Figuren.	Seite 66.	§. 95.
VIII. Abschnitt. Von den Verhältnissen der Figuren.	Seite 72.	§. 101.
IX. Abschnitt. Von der Lage der Linien gegen Ebenen und der Ebenen unter sich.	Seite 76.	§. 106.

II. Theil.

Von den geometrischen Körpern.

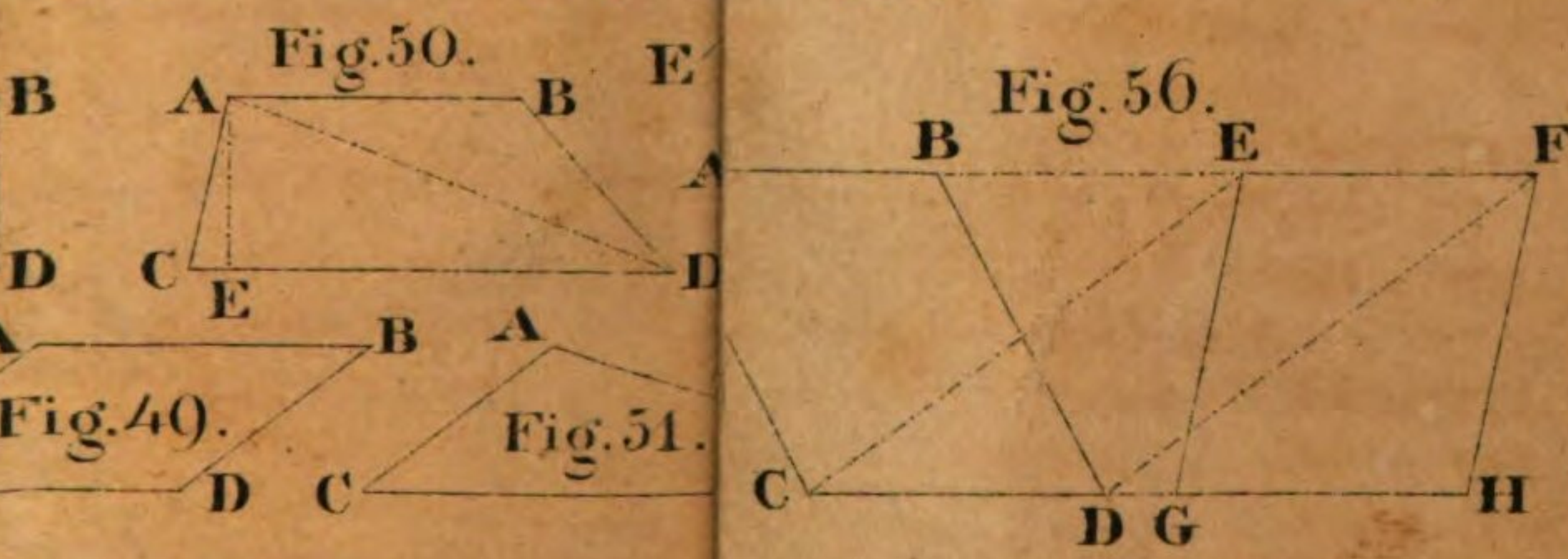
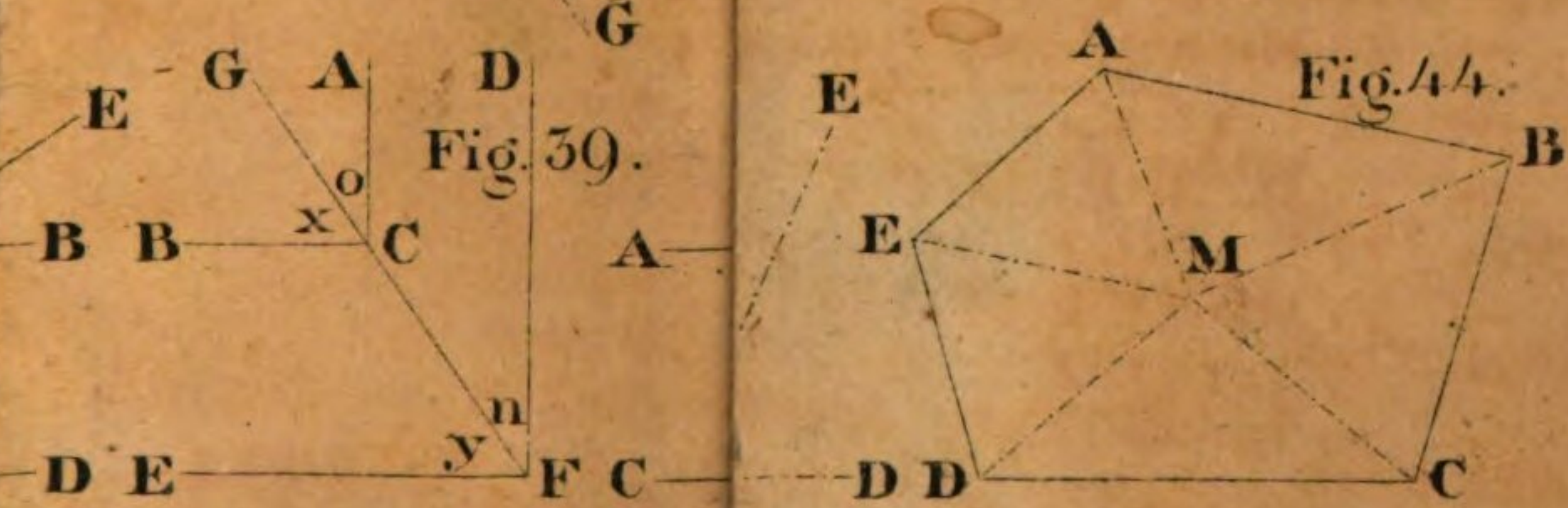
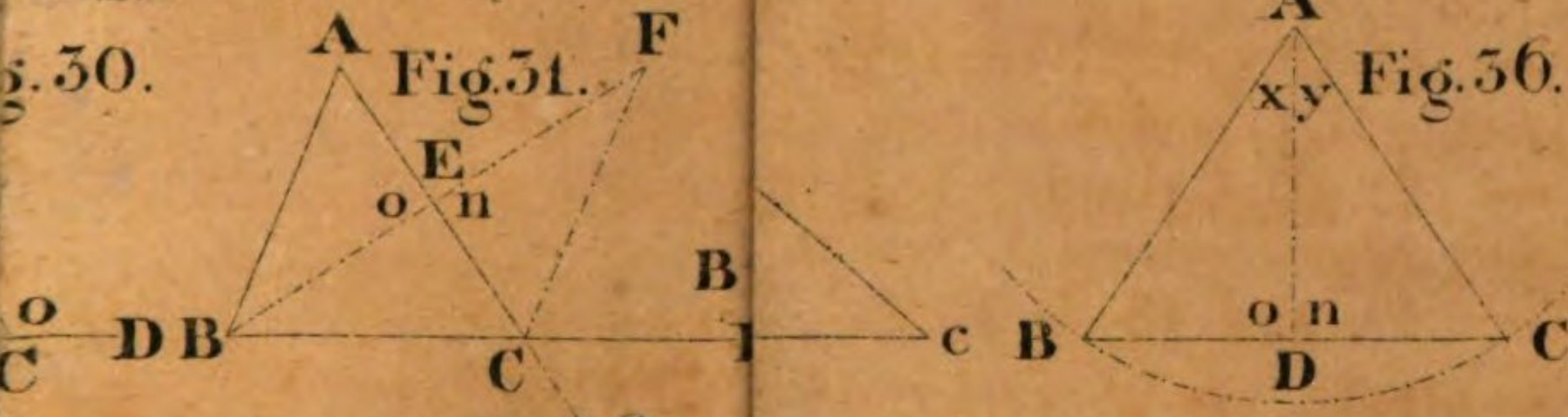
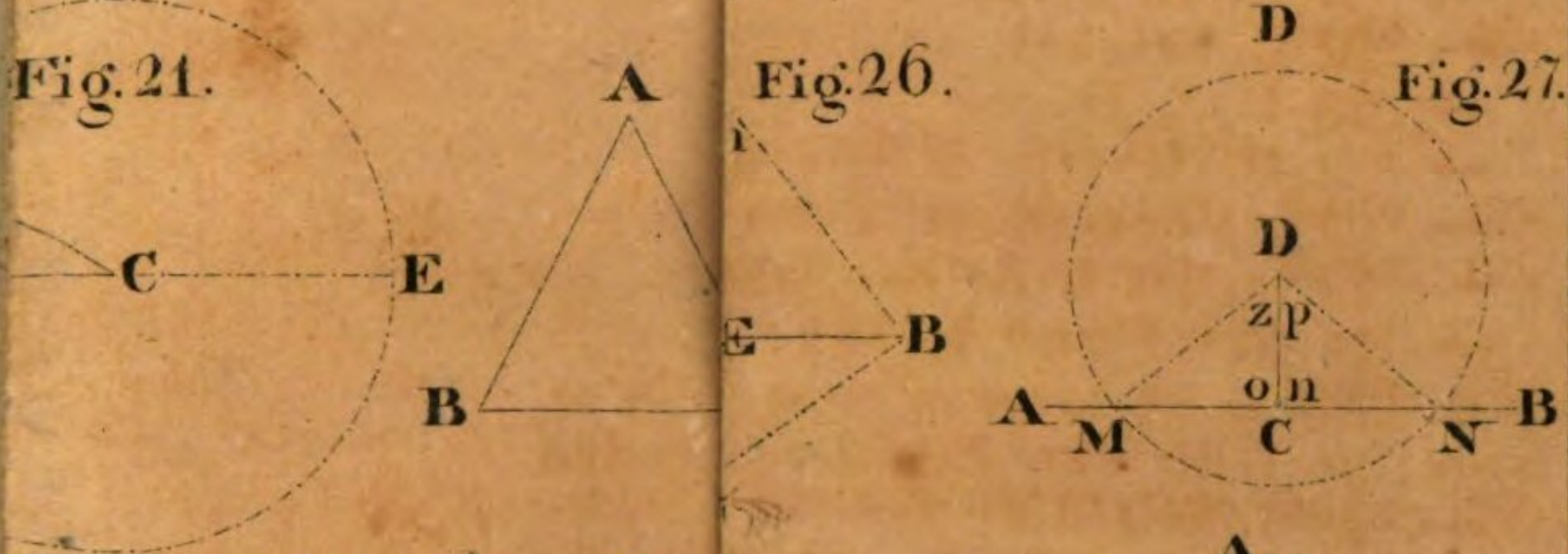
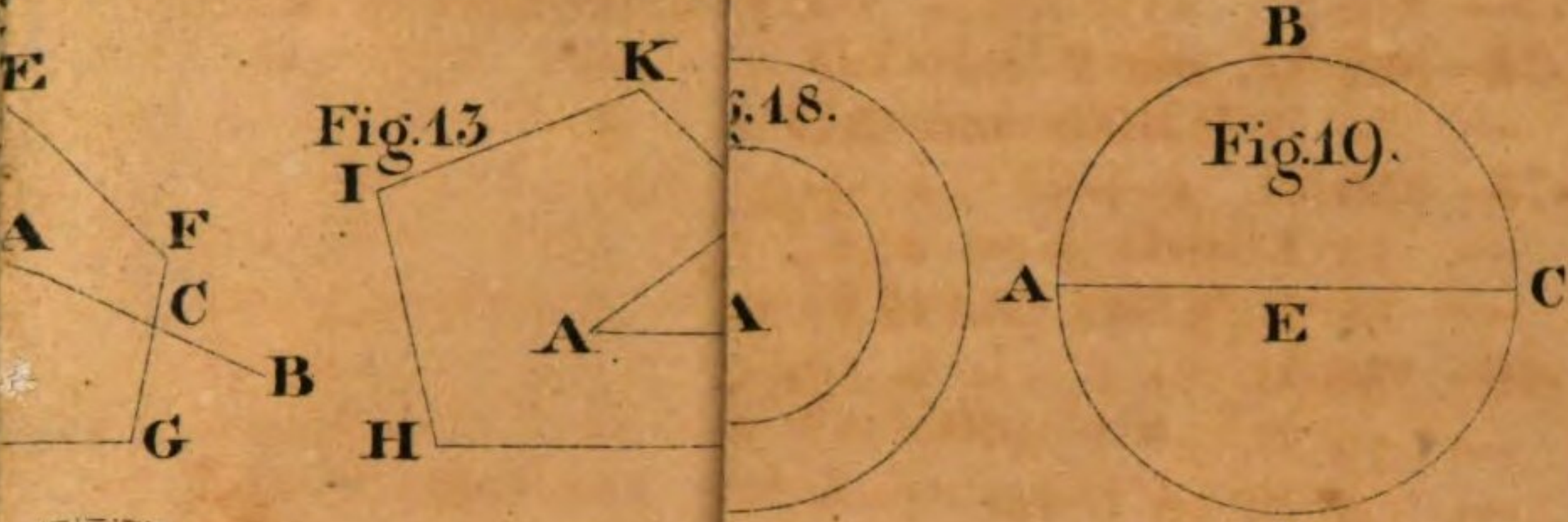
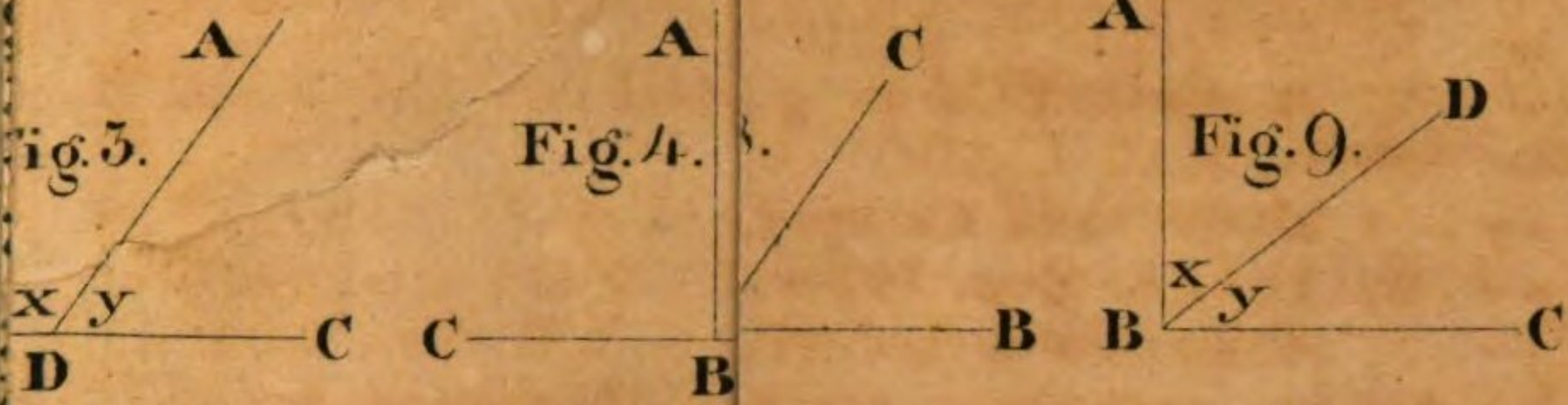
I. Abschnitt. Erklärung der geometrischen Körper	Seite 85.	§. 117.
II. Abschnitt. Berechnung der Oberflächen der vorzüglichsten geometr. Körper.	Seite 92.	§. 126.
III. Abschnitt. Vergleichung der geometrischen Körper.		
A. Vergleichung der Prismen unter sich	Seite 99.	§. 133.
B. Vergleichung der Pyramiden unter sich und mit Prismen	Seite 108.	§. 140.
IV. Abschnitt. Aehnlichkeit der Körper im Allgemeinen	Seite 115.	§. 147.
V. Abschnitt. Berechnung des körperlichen (cubischen) Inhaltes der geometrischen Körper	Seite 118.	§. 150.

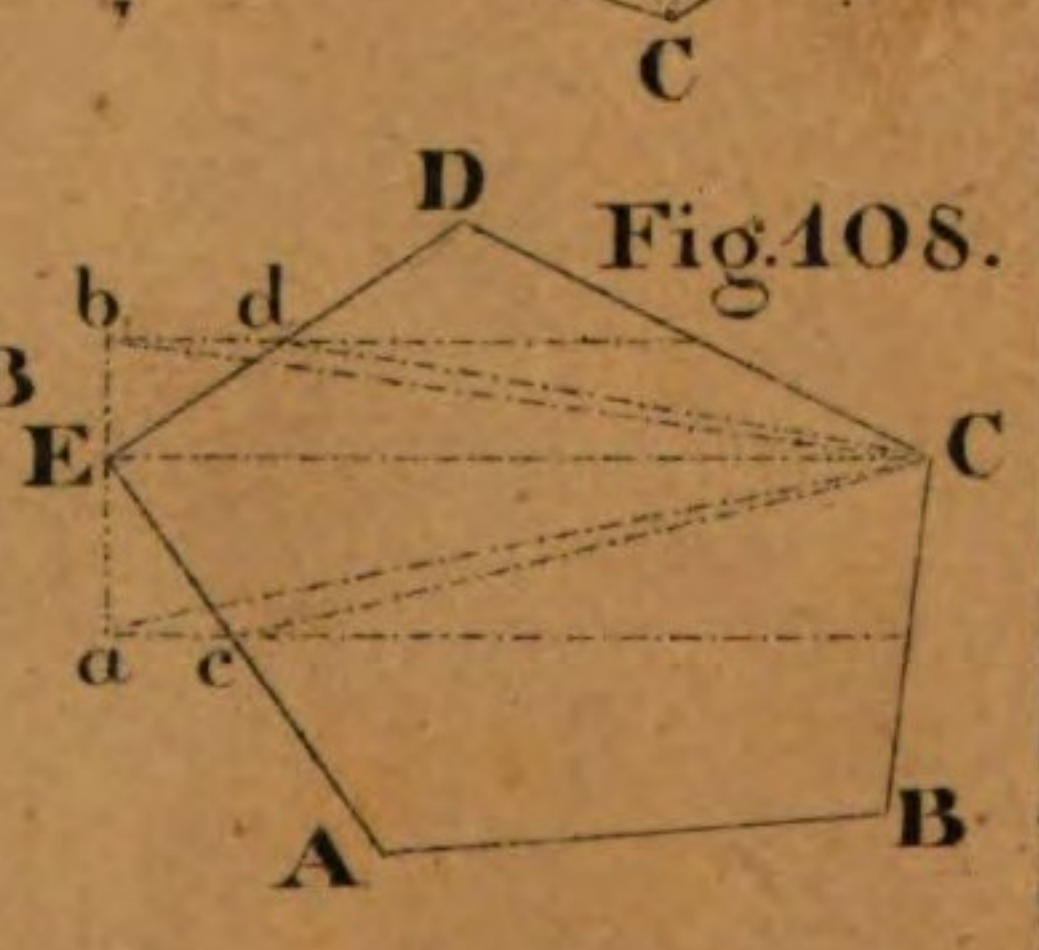
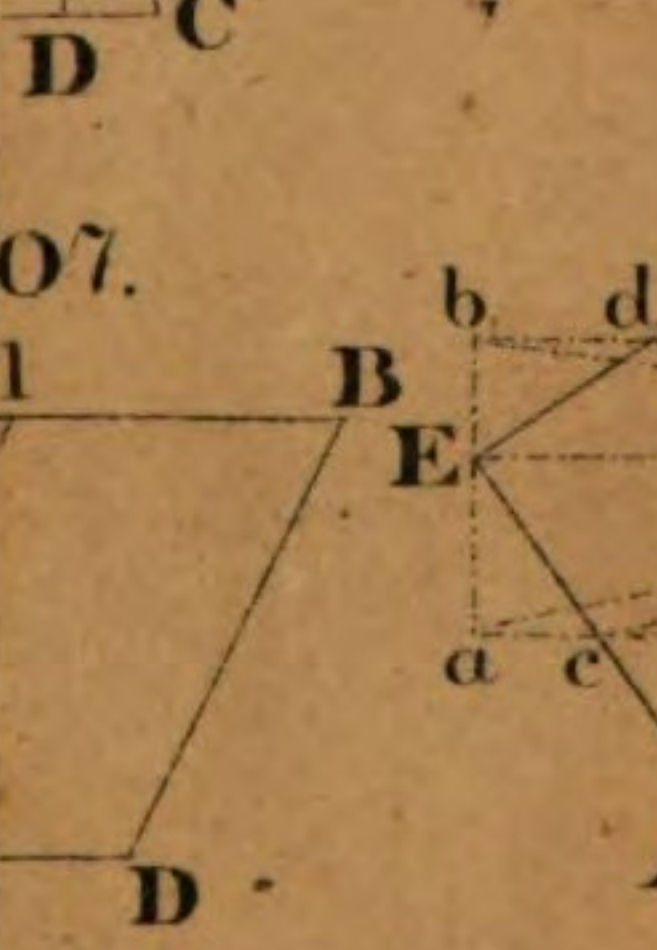
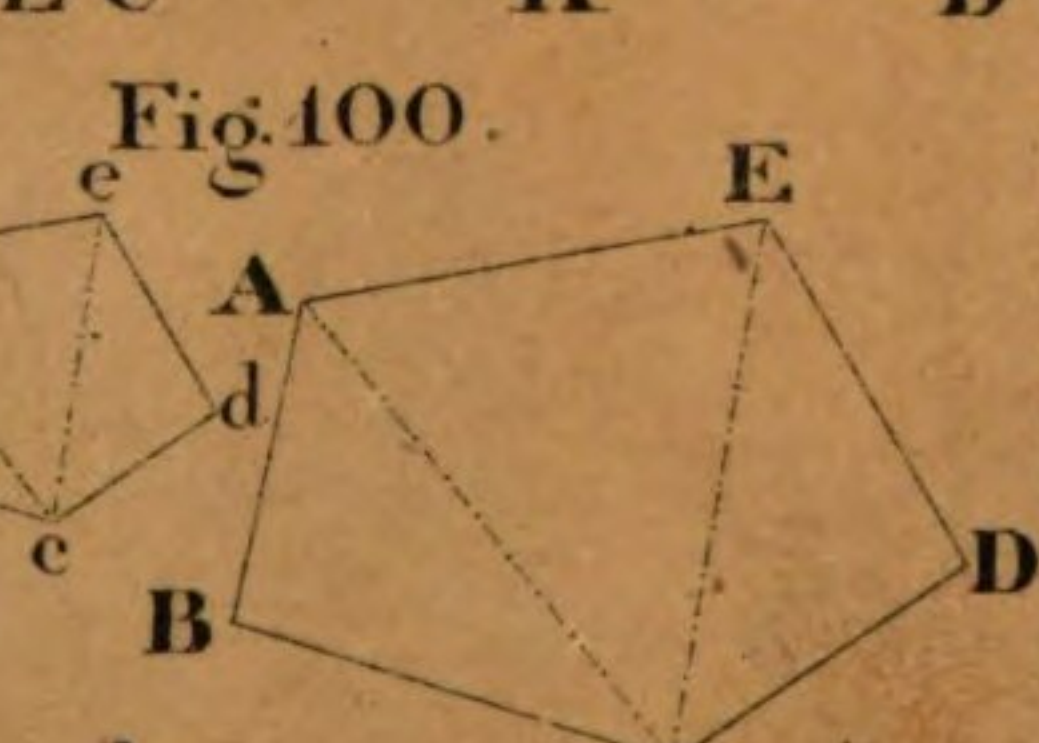
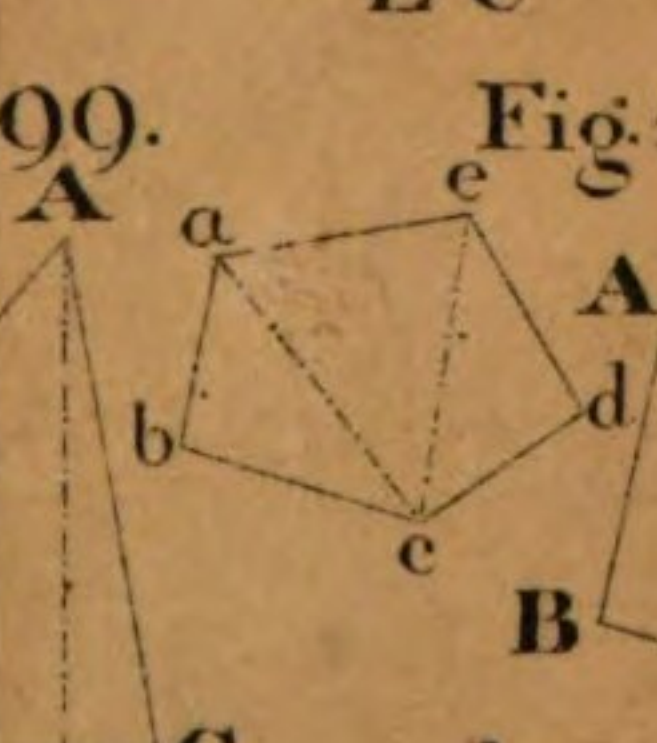
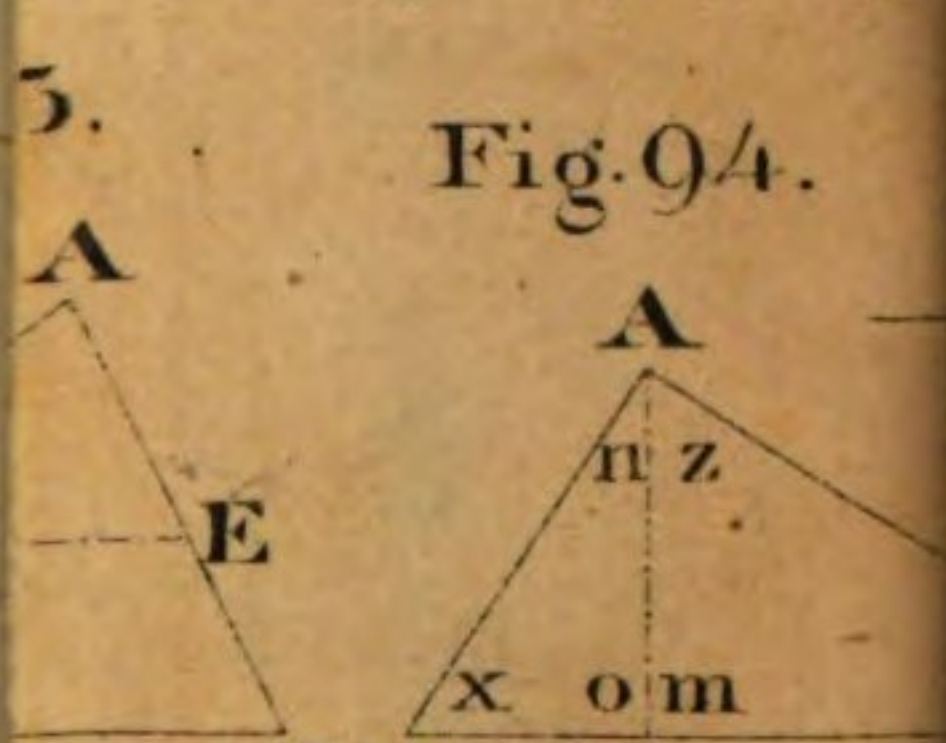
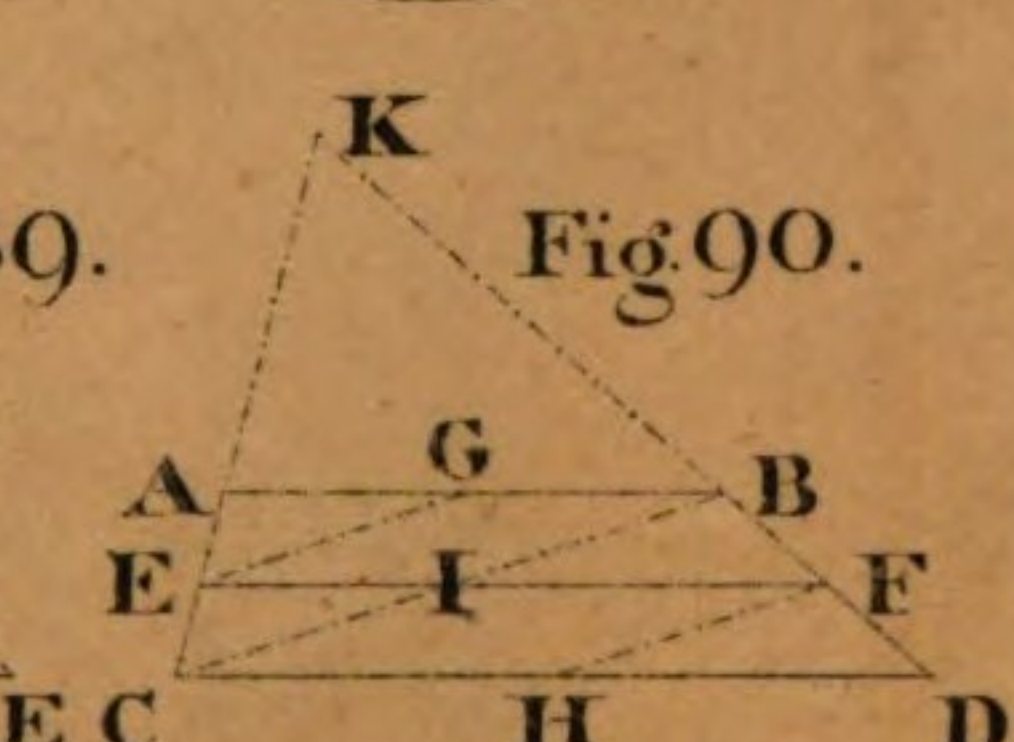
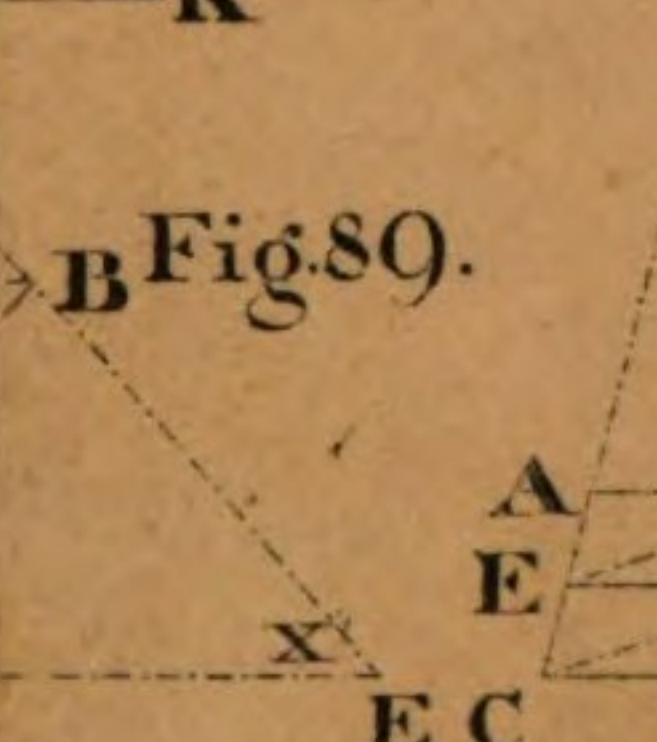
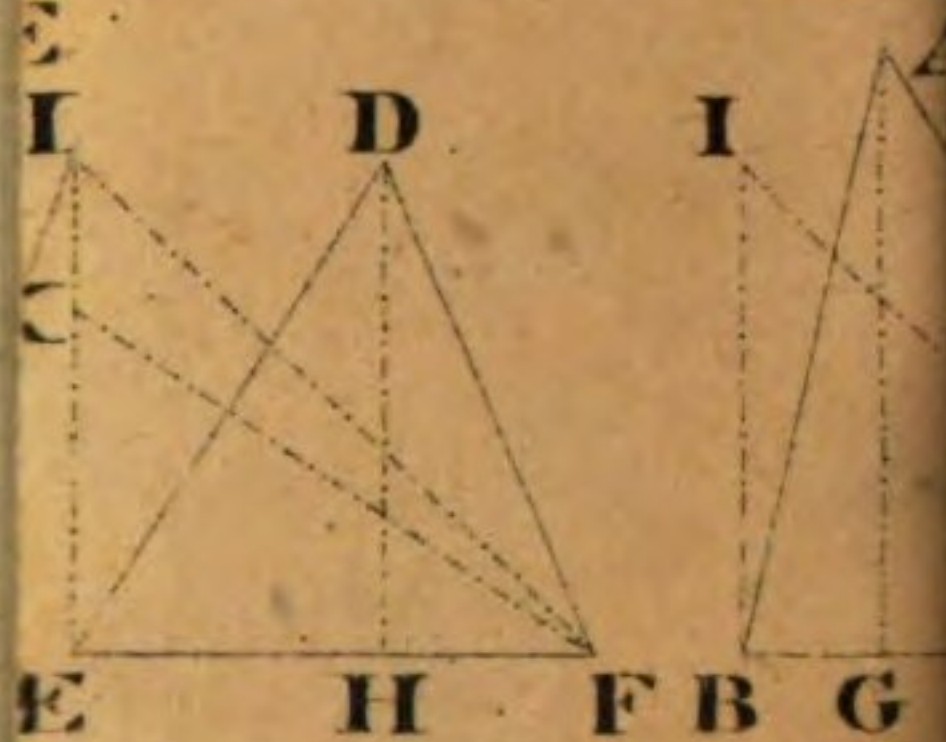
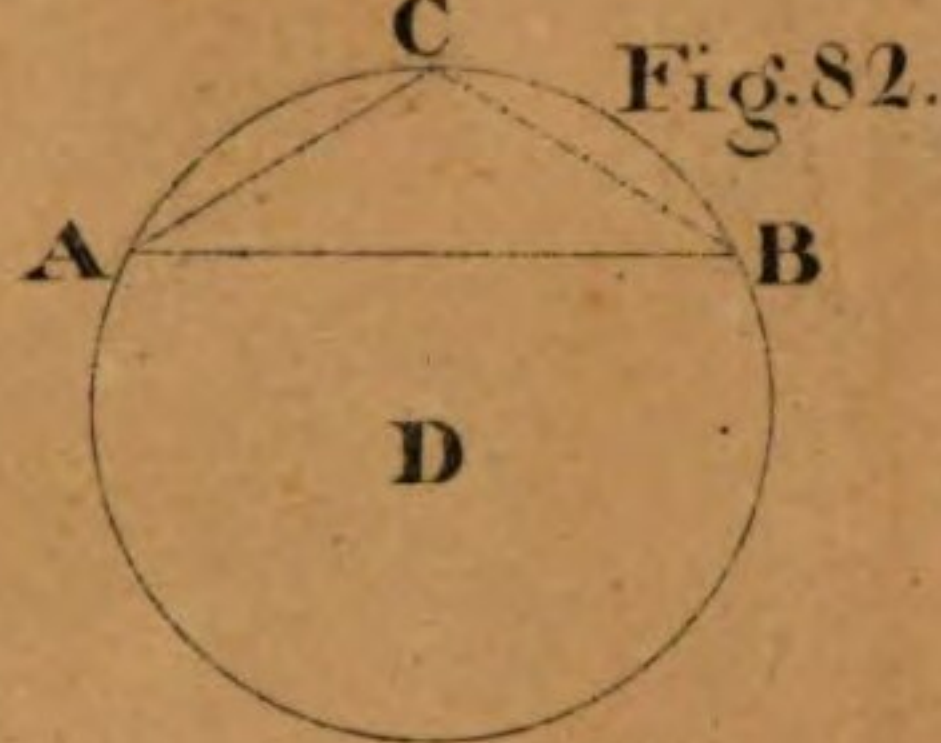
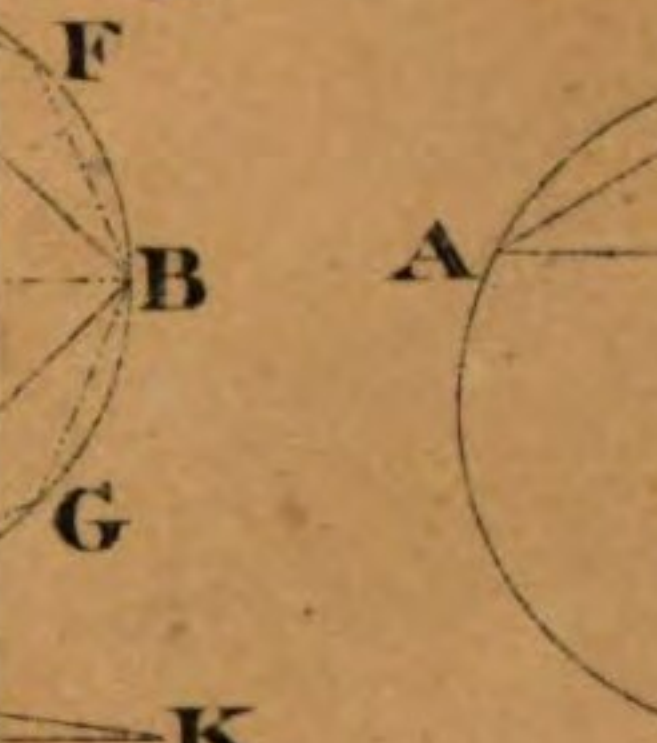
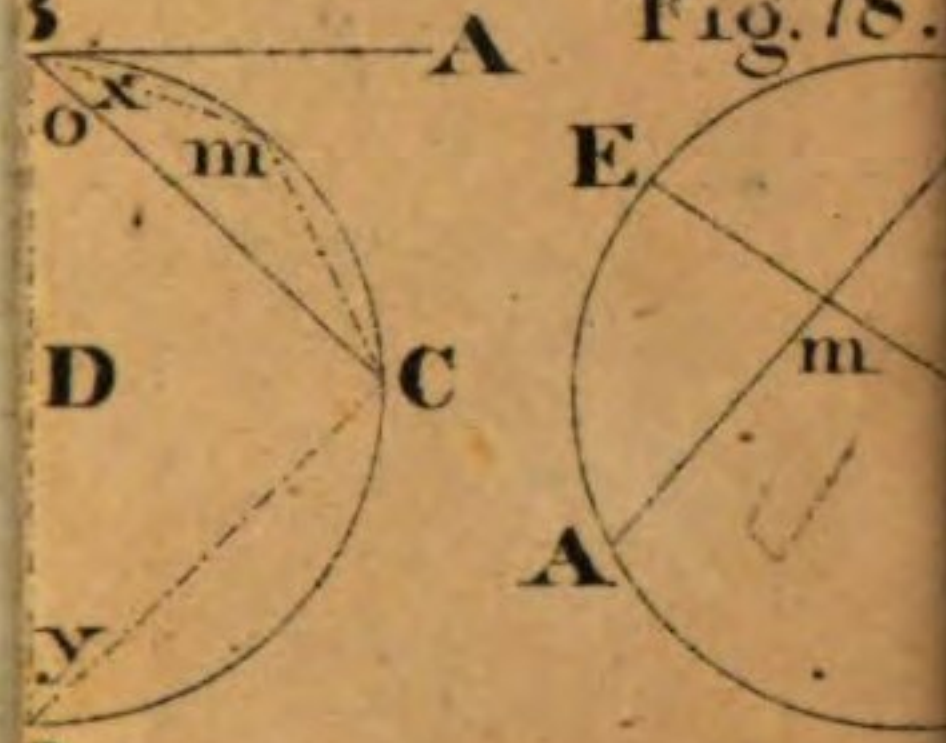
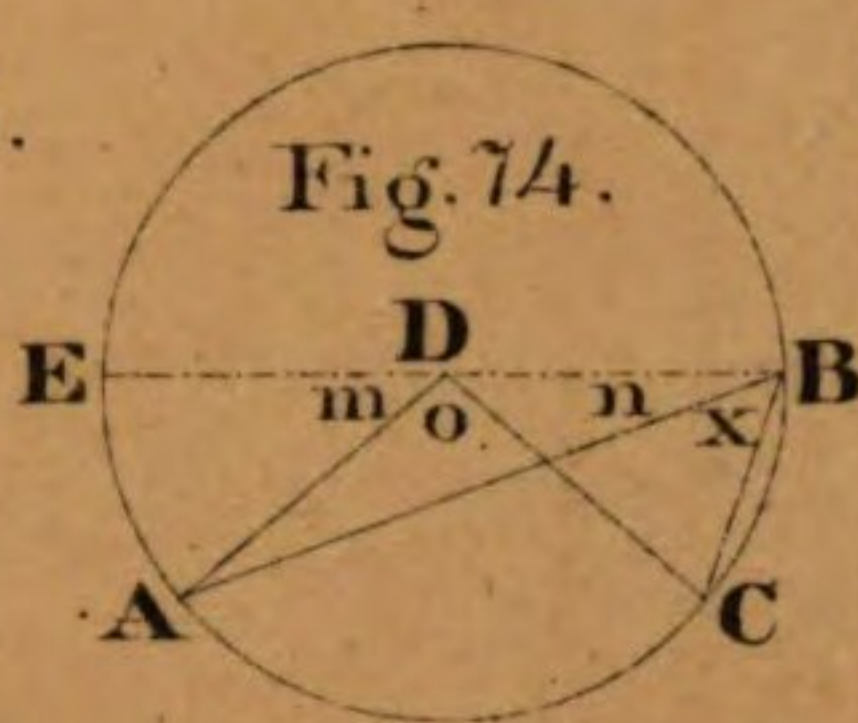
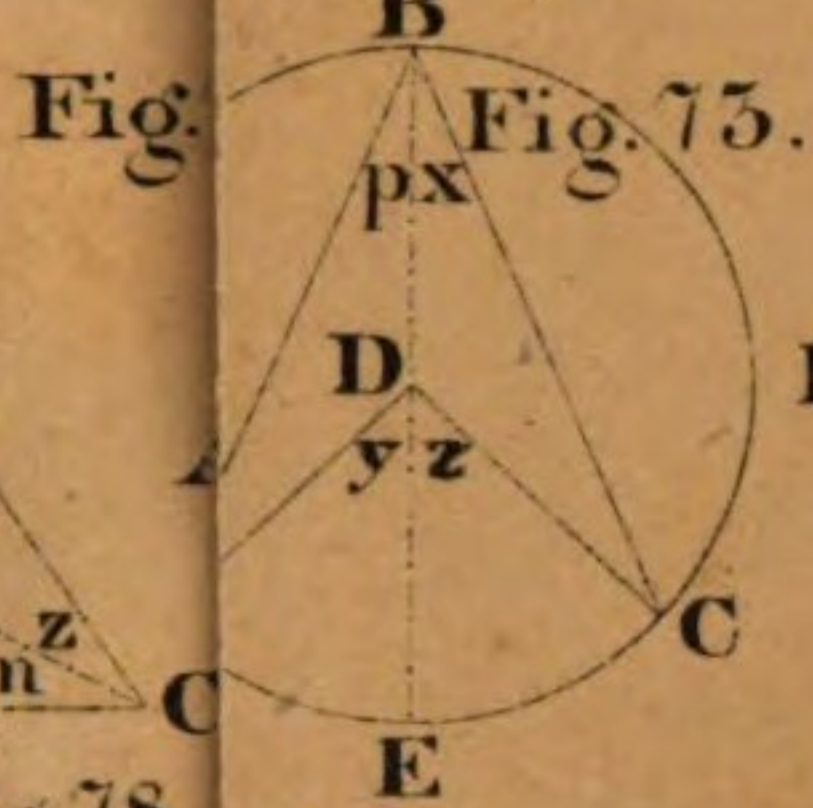
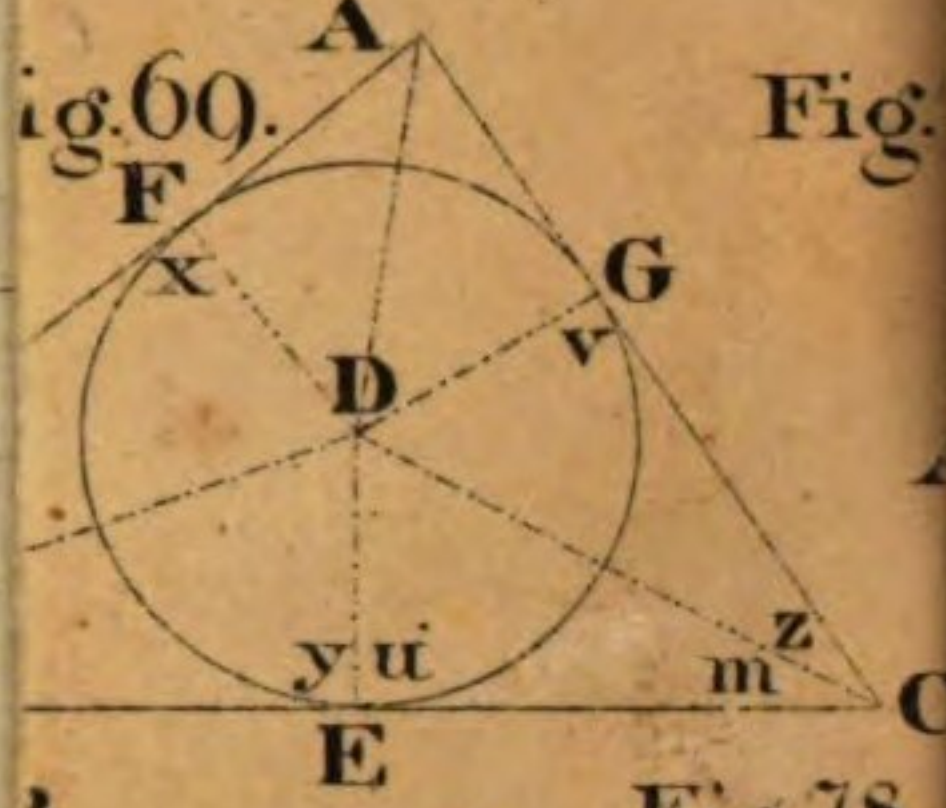
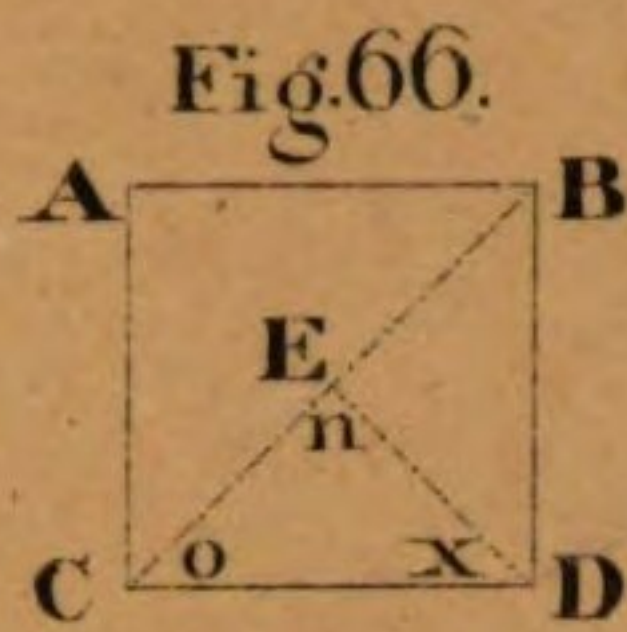
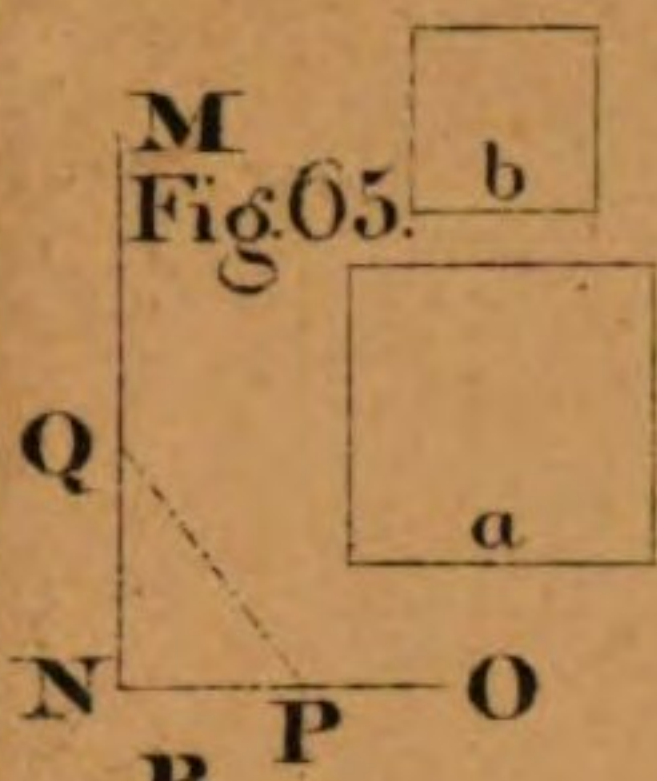
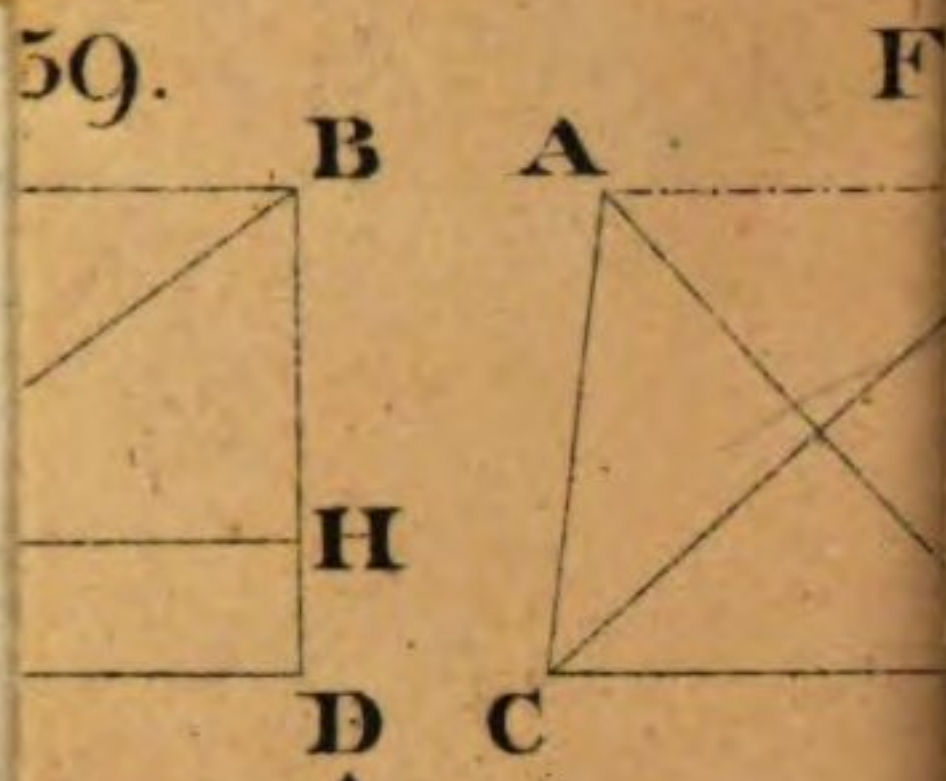
Geometrische Aufgaben.

1) Einleitung	Seite 131.	§. 1.
2) Construction von Grössen, welche durch algebraische Ausdrücke gegeben sind.	Seite 134.	§. 2.
3) Vermischte geometrische Aufgaben.	Seite 143.	§. 22.
4) Constructions-Aufgaben	Seite 200.	§. 87.
5) Stereometrische Aufgaben	Seite 207.	§. 105.

Druckfehler.

Seite	7	Zeile	11	statt sumpf lies stumpf
—	8	—	22	st. nur in l. in
—	9	—	19	st. Dritte l. dritte
—	9	—	27	st. Be l. BC
—	10	—	25	st. BAC l. ABC
—	14	—	1	bleibt «aus C» weg.
—	16	—	27	l. §. 9. Zus. IV.
—	21	—	27	st. haben l. haben
—	26	—	2	st. zusammen zwey l. zusammen einem
—	27	—	26	st. die l. nur die
—	28	—	30	l. Höhen mit AD
—	31	—	36	st. $\triangle + EFG$ l. $+ \triangle EFG$
—	32	—	11	l. anliegenden
—	32	—	31	l. [§. 42. Z. II.]
—	32	—	35	st. §. 27. l. §. 49.
—	61	—	19	st. x'' l. $x^{d''}$
—	62	—	4	st. in l. im
—	64	—	32	l. Winkel
—	65	—	23	l. $\frac{2}{10}$ Dégré
—	81	—	2	st. §. 110. l. §. 109.
—	91	—	2	st. derselben l. der Kugel
—	99	—	24	st. ist l. ist der Oberfläche nach
—	109	—	22	st. 1, und l. 1:1,
—	112	—	36	u. 37 l. in m und h in n
—	113	—	34	l. in den Parallelepipeden
—	117	—	32	l. wie die
—	127	—	12	l. $\sqrt[3]{\frac{3K}{4\pi}}$ und $\sqrt[3]{\frac{6K}{\pi}}$
—	128	—	21	st. Cylinder l. Kegel
—	135	—	27	st. einem l. einen
—	144	—	11	und 13. l. 8' 5''
—	157	—	11	l. $\pm \sqrt{[p^4 - 24p^2m + 16m^2]}$
—	161	—	24	st. n^2 l. x^2
—	165	—	22	l. $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - p^2}$
—	166	—	25	st. MO l. MP
—	171	—	12	l. ABET
—	171	—	20	st. AF l. AT
—	173	—	3	l. CDEF = m
—	181	—	16	st. IF(da l. IF ² (da
—	182	—	7	l. noch = $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{a+b+c}}$
—	183	—	2	st. 1. und 2. l. 2.
—	185	—	10	st. ist die Summe l. sind die Summen
—	189	—	19	l. BK $\nparallel$ CD.
—	191	—	4	st. DEF l. BEF
—	200	—	12	st. $] \frac{1}{2}$ l. $] = \frac{1}{2}$





10.

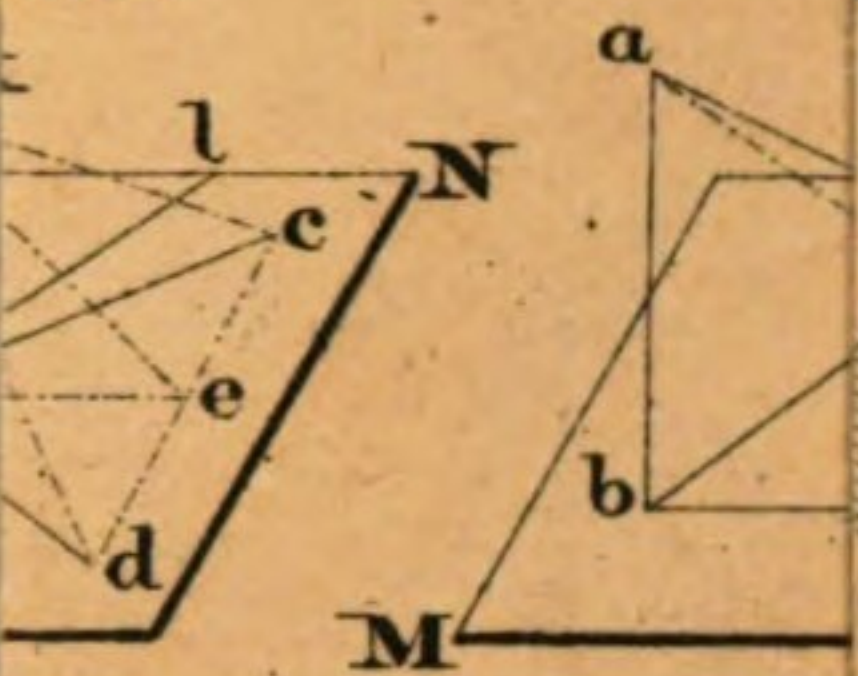


Fig. 115.

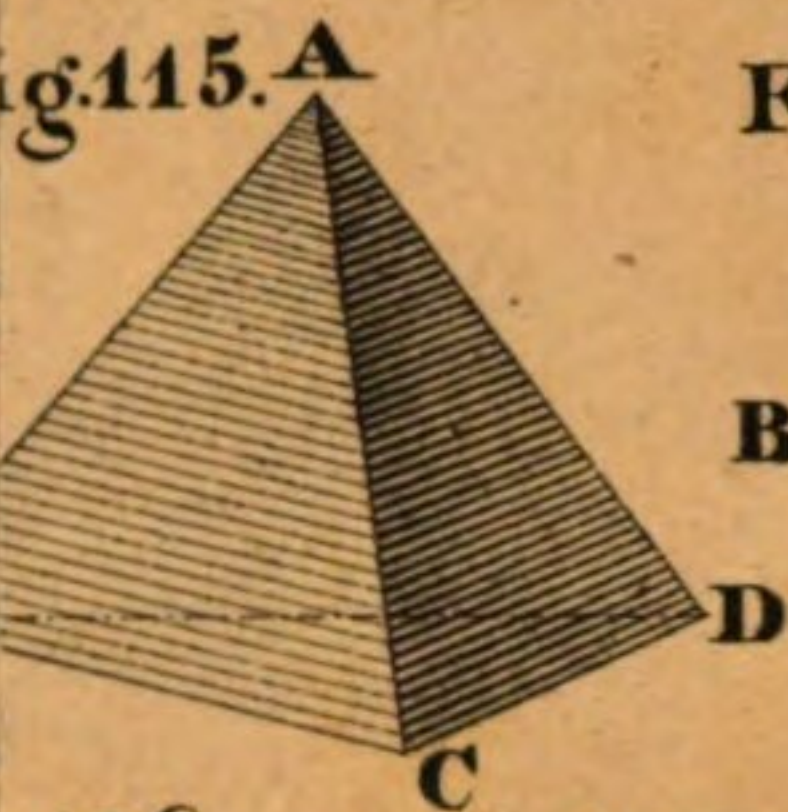


Fig. 116.

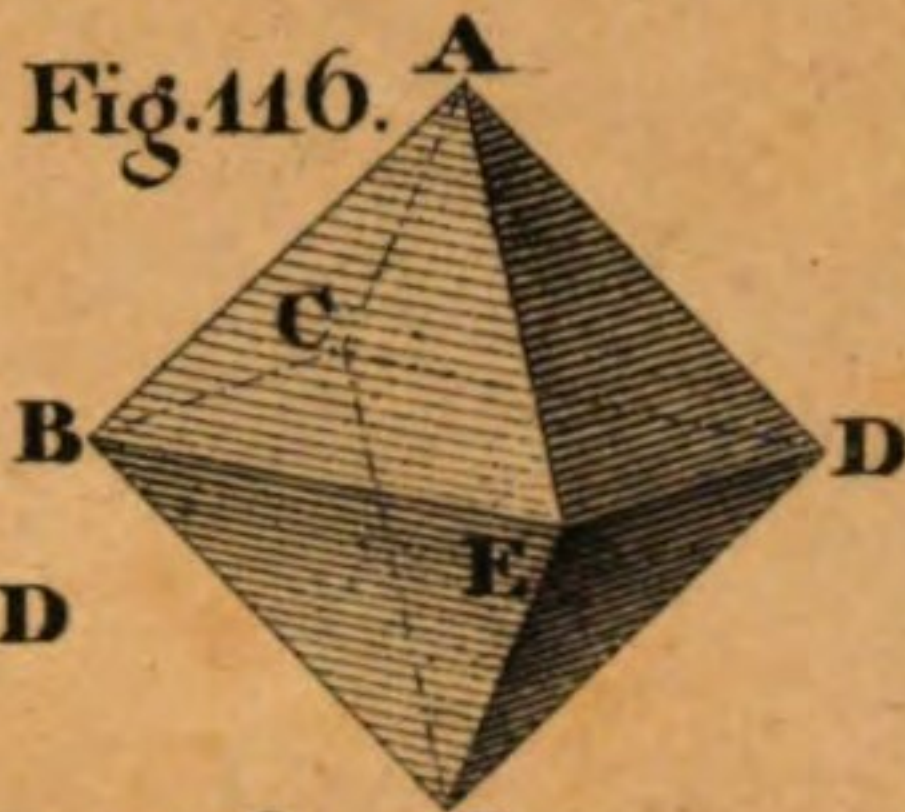


Fig. 120.

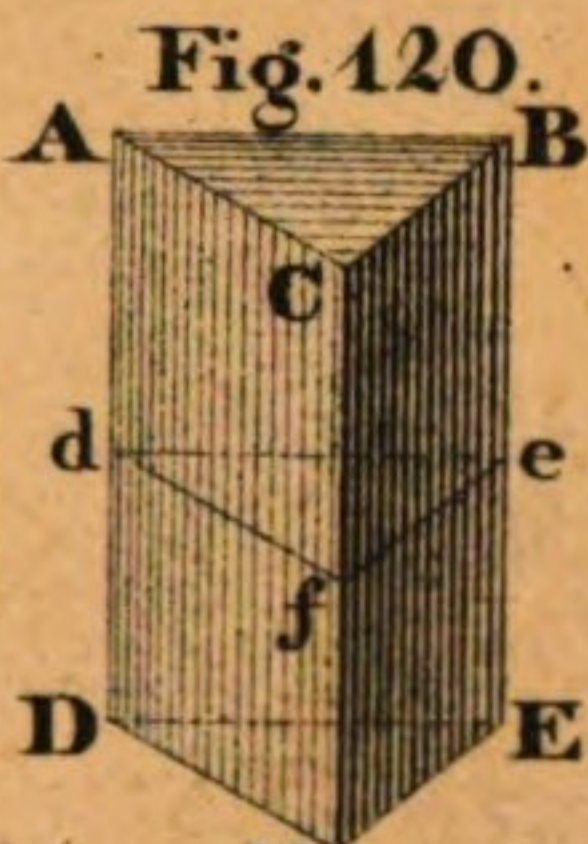


Fig. 126.



Fig. 126 a.



Fig. 127.

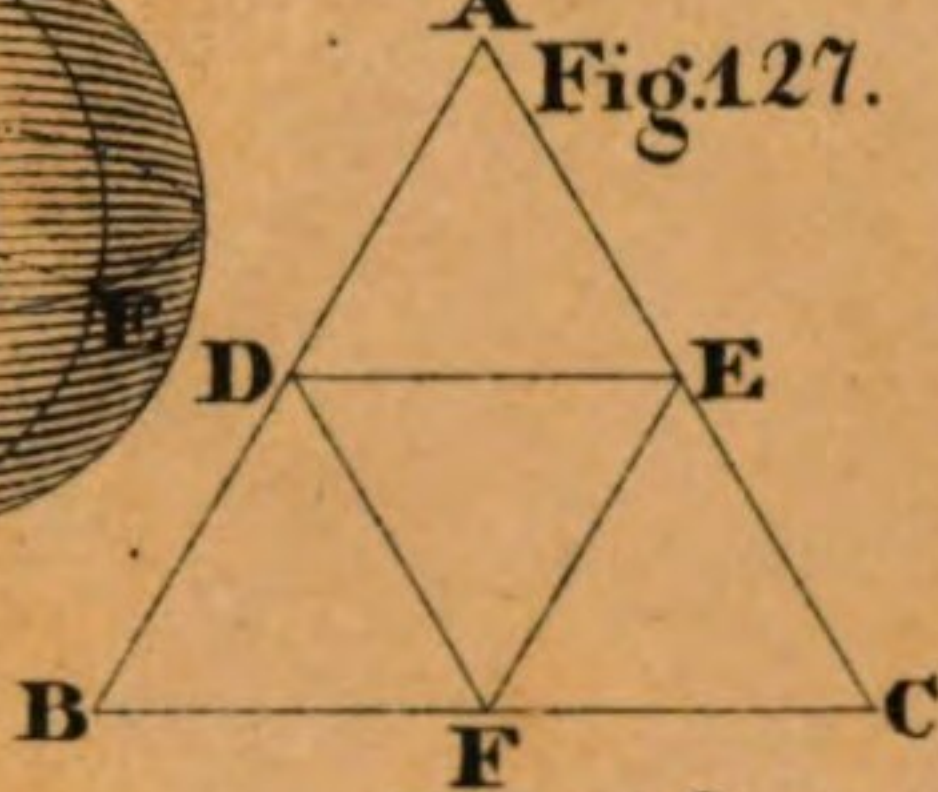


Fig. 130.

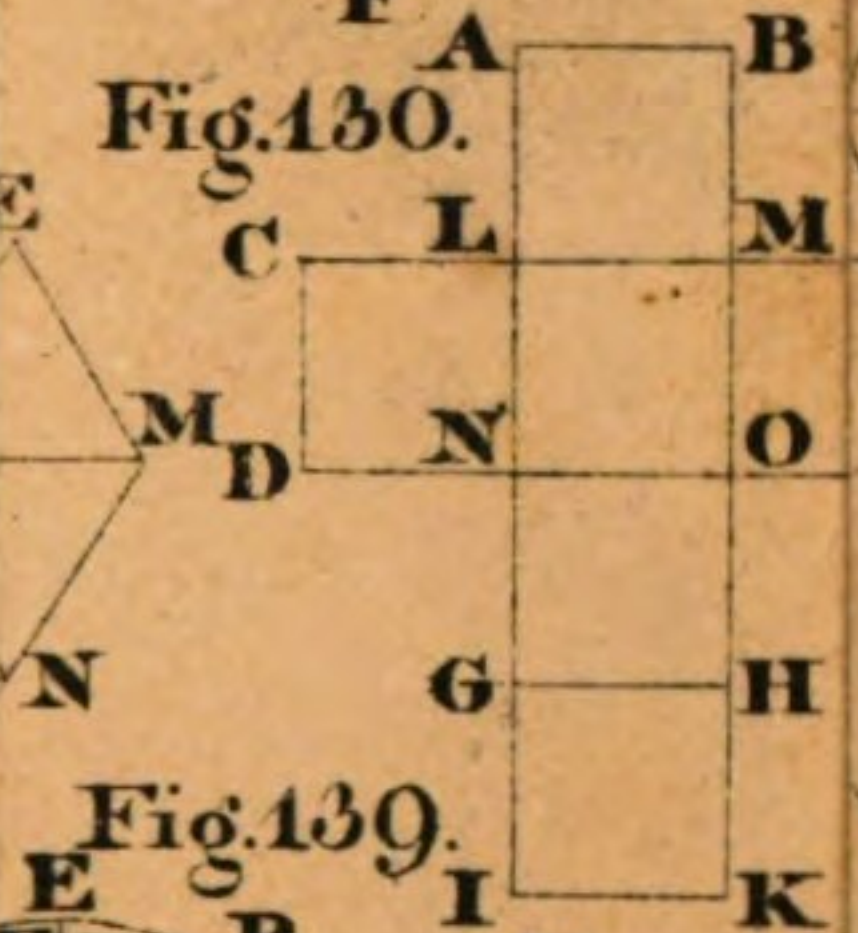


Fig. 135.

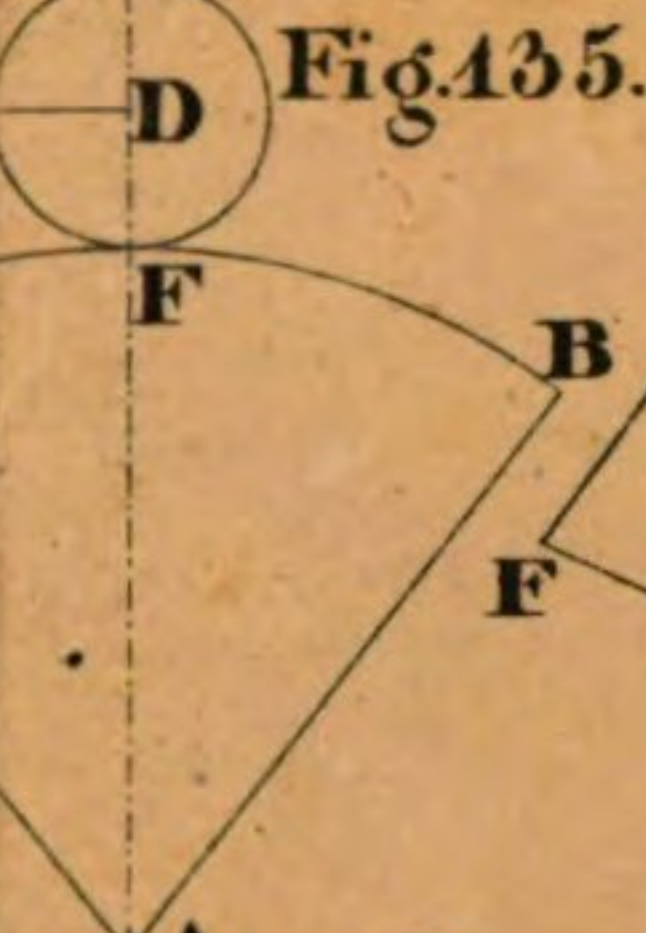


Fig. 136.

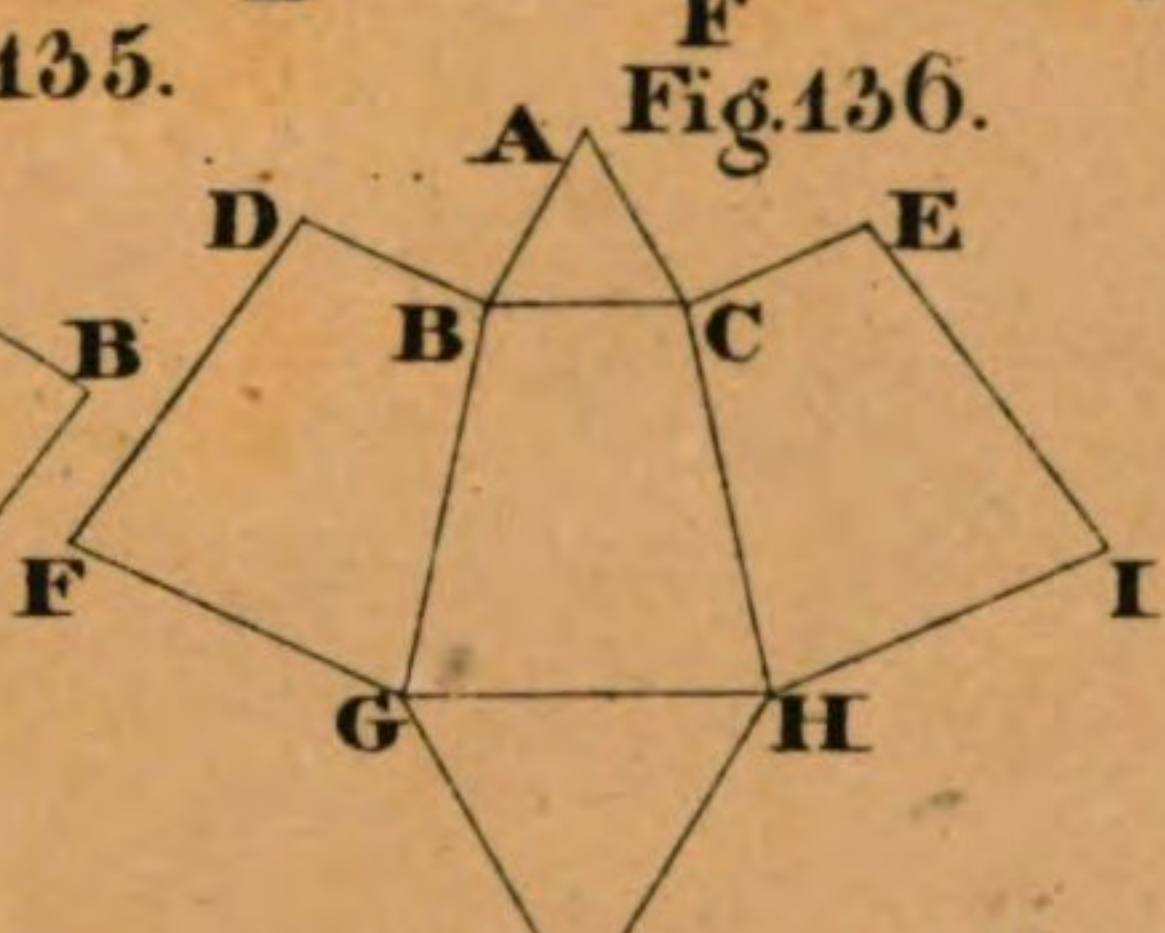


Fig. 139.



Fig. 146.

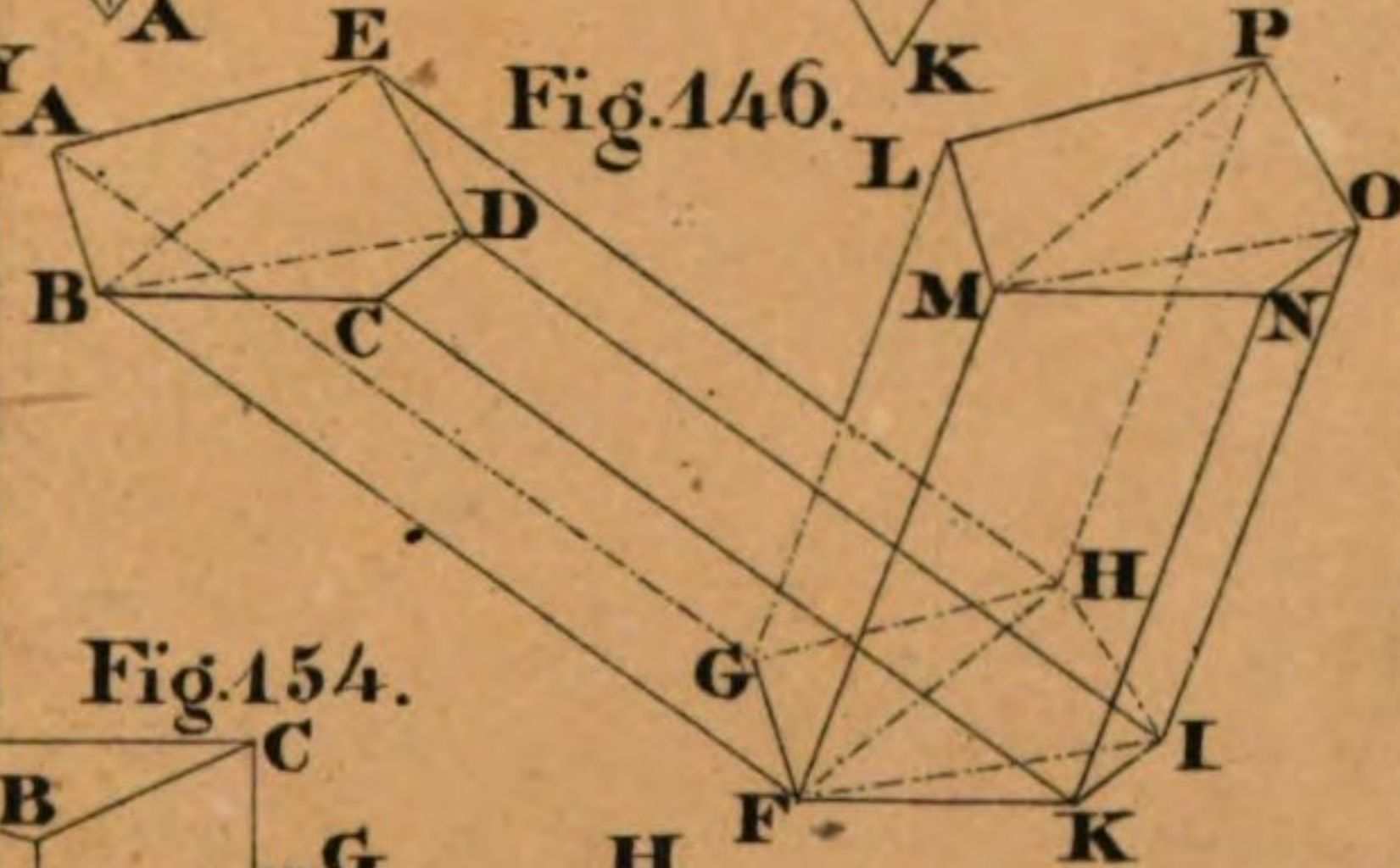


Fig. 154.

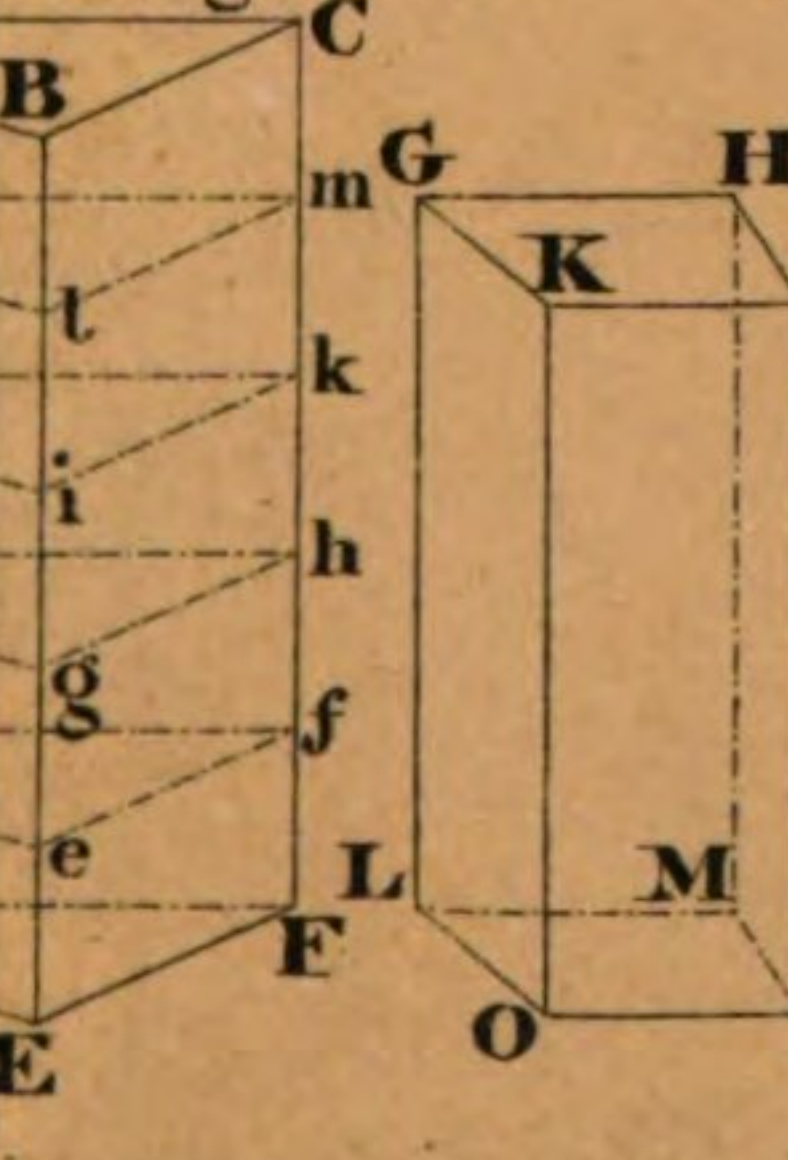
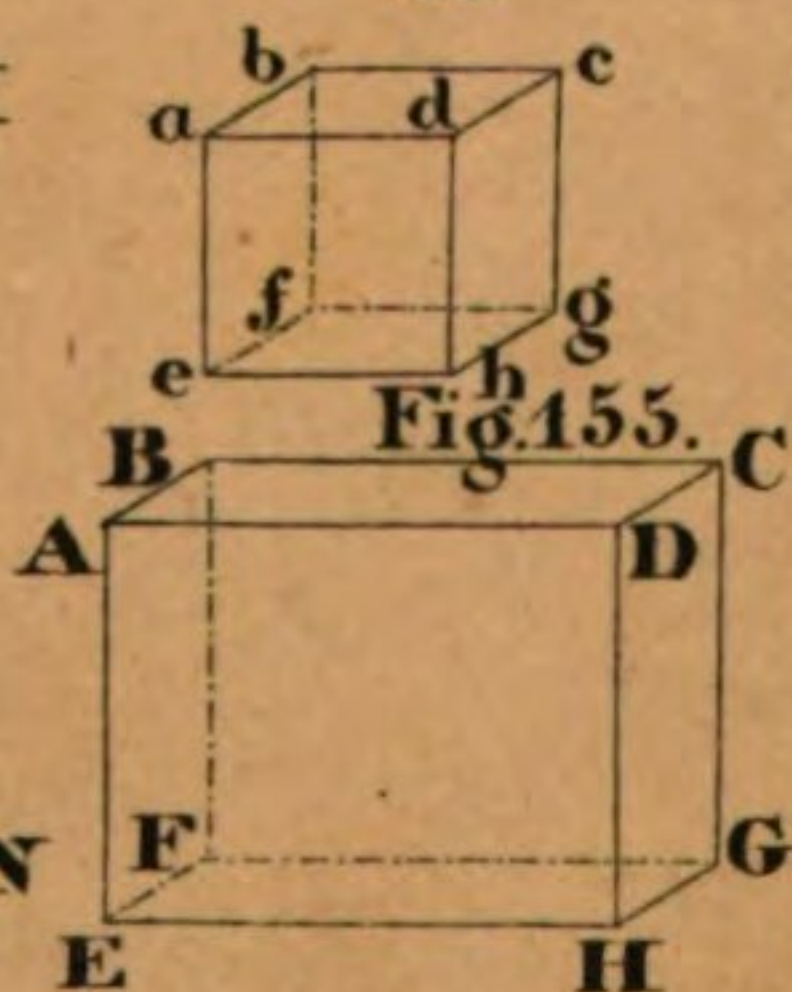
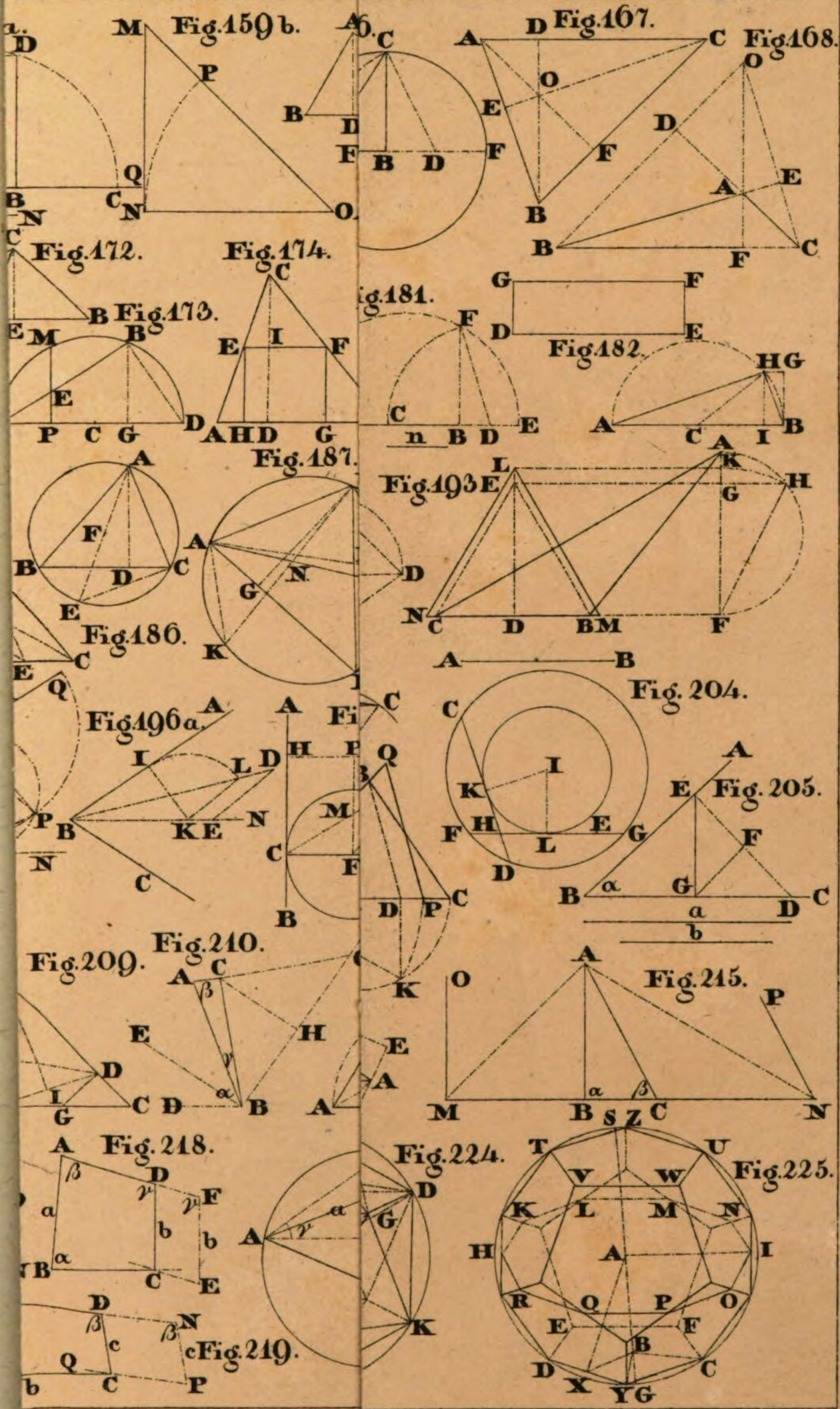


Fig. 150.



Fig. 155.







Unruh, Raimund,

Lehrbuch der Geometrie

München 1824

Math.p. 614 m

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083026-6